Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Hanna Wojewódka-Ściążko
redaktor pomocniczy: Łukasz Pawela

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk

AKADEMIA SZTUKI KWANTOWEJ

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

NAUKA DLA SPOŁECZEŃSTWA

Plan wykładu

Pierwsza godzina wykładu:

- Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą **przestrzeni probabilistycznej**.
- Prawdopodobieństwo warunkowe. Zdarzenia niezależne.
- **Zmienna losowa**.
- Zmienna losowa dyskretna.

Druga godzina wykładu:

- Dystrybuanta zmiennej losowej.
- Zmienna losowa typu ciągłego.
- Dwuwymiarowa zmienna losowa. **Zmienne losowe niezależne**.
- **Centralne twierdzenie graniczne. Rozkład t Studenta**.

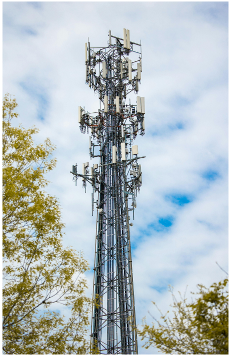
Doświadczenie losowe

Nadanie wiadomości: 0100001011010.

Źródło: `https://www.pexels.com/` (cottonbro studio, Caleb Oquendo)

Doświadczenie losowe

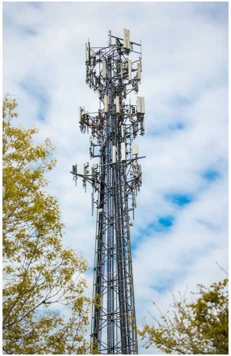
Nadanie wiadomości: 0100001011010.



Źródło: `https://www.pexels.com/` (cottonbro studio, Caleb Oquendo)

Doświadczenie losowe

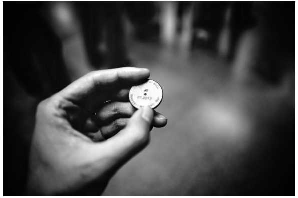
Nadanie wiadomości: 0100001011010.



Odebranie wiadomości: 1100001011000.

Źródło: `https://www.pexels.com/` (cottonbro studio, Caleb Oquendo)

Doświadczenia losowe



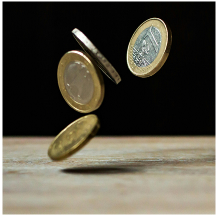
Źródło: https://unsplash.com/ (ZSun Fu), https://www.pexels.com/ (lil artsy, Tima Miroshnichenko)

Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą przestrzeni probabilistycznej

Model matematyczny (uproszczenie eksperymentu rzeczywistego)

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Mateusz Dach)

Model matematyczny (dla rzutu symetryczną monetą)

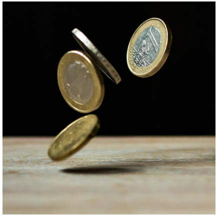


- Określamy możliwe wyniki doświadczenia losowego:

$$o, \qquad r.$$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Pixabay)

Model matematyczny (dla rzutu symetryczną monetą)



- Określamy możliwe wyniki doświadczenia losowego:

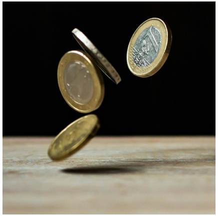
$$o, \qquad r.$$

- Wypisujemy wszystkie interesujące nas zdarzenia losowe:

$$o, \qquad r, \qquad \{o, r\}, \qquad \emptyset.$$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Pixabay)

Model matematyczny (dla rzutu symetryczną monetą)



- Określamy możliwe wyniki doświadczenia losowego:

  $$o, \qquad r.$$

- Wypisujemy wszystkie interesujące nas zdarzenia losowe:

  $$o, \qquad r, \qquad \{o, r\}, \qquad \emptyset.$$

- Przypisujemy im prawdopodobieństwa:

  $$\begin{array}{lcl} o & \to & 0.5, \\ r & \to & 0.5, \\ \{o, r\} & \to & 1 \text{ (zdarzenie pewne)}, \\ \emptyset & \to & 0 \text{ (zdarzenie niemożliwe)}. \end{array}$$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Pixabay)

Przestrzeń probabilistyczna

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

Przestrzeń probabilistyczna

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, składającą się z:

- niepustego zbioru Ω (przestrzeń zdarzeń elementarnych),

Przestrzeń probabilistyczna

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, składającą się z:

- niepustego zbioru Ω (przestrzeń zdarzeń elementarnych),
- zbioru $\mathcal{F}$ (przestrzeń zdarzeń losowych) podzbiorów zbioru Ω (zawierającego zdarzenie pewne Ω, niemożliwe $\emptyset$, ale też wszystkie sumy, przekroje i różnice zawartych w nim zbiorów, a także zdarzenia przeciwne),

Przestrzeń probabilistyczna

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, składającą się z:

- niepustego zbioru Ω (przestrzeń zdarzeń elementarnych),
- zbioru $\mathcal{F}$ (przestrzeń zdarzeń losowych) podzbiorów zbioru Ω (zawierającego zdarzenie pewne Ω, niemożliwe $\emptyset$, ale też wszystkie sumy, przekroje i różnice zawartych w nim zbiorów, a także zdarzenia przeciwne),
- miary probabilistycznej, czyli funkcji $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$

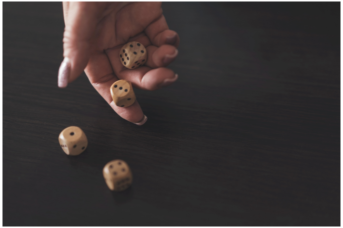
Przestrzeń probabilistyczna

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, składającą się z:

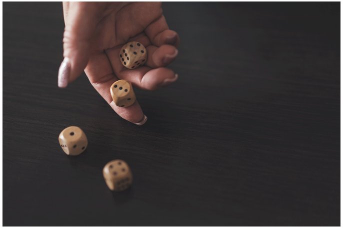
- niepustego zbioru Ω (przestrzeń zdarzeń elementarnych),
- zbioru $\mathcal{F}$ (przestrzeń zdarzeń losowych) podzbiorów zbioru Ω (zawierającego zdarzenie pewne Ω, niemożliwe $\emptyset$, ale też wszystkie sumy, przekroje i różnice zawartych w nim zbiorów, a także zdarzenia przeciwne),
- miary probabilistycznej, czyli funkcji $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ o następujących własnościach:
  (1) *unormowanie*
  $$\mathbb{P}(\Omega) = 1,$$
  (2) *przeliczalna addytywność*
  jeśli $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ są zbiorami rozłącznymi, tzn. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to
  $$\mathbb{P}\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\right) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots.$$

Przestrzeń elementarna skończona (rzut symetryczną kostką)



Źródło: `https://www.pexels.com/` (Oleksandr P)

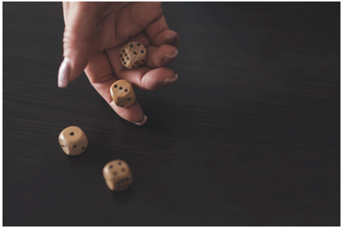
Przestrzeń elementarna skończona (rzut symetryczną kostką)



- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Oleksandr P)

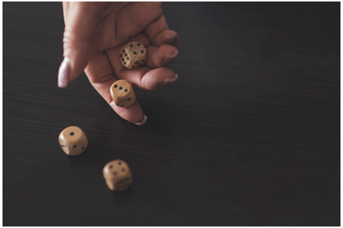
Przestrzeń elementarna skończona (rzut symetryczną kostką)



- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset,\ \ \{1\}, \ldots, \{6\},\ \ \{1,2\}, \ldots, \{5,6\},\ \ \ldots,\ \ \Omega\}$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Oleksandr P)

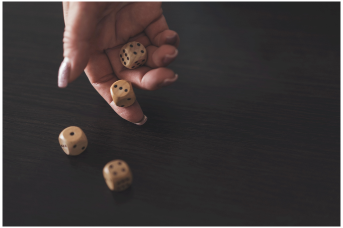
Przestrzeń elementarna skończona (rzut symetryczną kostką)



- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset,\ \{1\}, \ldots, \{6\},\ \{1, 2\}, \ldots, \{5, 6\},\ \ldots,\ \Omega\}$
- $$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{moc zbioru } A}{\text{moc zbioru } \Omega} = \frac{\text{moc zbioru } A}{6}$$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Oleksandr P)

Przestrzeń elementarna skończona (rzut symetryczną kostką)

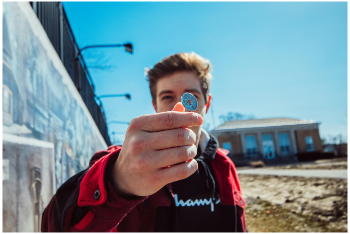


- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\mathcal{F} = \{\emptyset, \ \{1\}, \dots, \{6\}, \ \{1, 2\}, \dots, \{5, 6\}, \ \dots, \ \Omega\}$
- $$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{moc zbioru } A}{\text{moc zbioru } \Omega} = \frac{\text{moc zbioru } A}{6}$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \tfrac{0}{6} = 0$$
$$\mathbb{P}(\{1\}) = \dots = \mathbb{P}(\{6\}) = \tfrac{1}{6}$$
$$\mathbb{P}(\{1, 2\}) = \dots = \mathbb{P}(\{5, 6\}) = \tfrac{2}{6}$$
$$\vdots$$
$$\mathbb{P}(\Omega) = \tfrac{6}{6} = 1$$

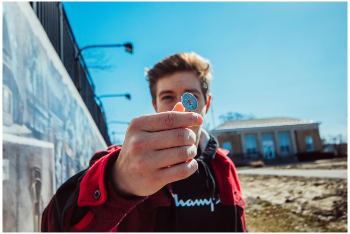
Źródło: `https://www.pexels.com/` (Oleksandr P)

Prz. elementarna przeliczalna (rzut monetą aż do otrzymania orła)



Źródło: `https://www.pexels.com/` (CocaKolaLips)

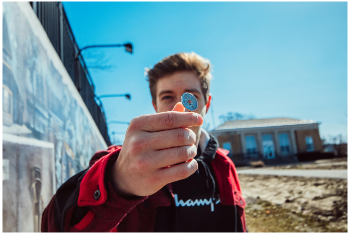
Prz. elementarna przeliczalna (rzut monetą aż do otrzymania orła)



- $\Omega = \{\{o\}, \{ro\}, \{rro\}, \{rrro\}, \ldots\}$
- $\mathcal{F}$ – zbiór wszystkich podzbiorów zbioru Ω

Źródło: `https://www.pexels.com/` (CocaKolaLips)

Prz. elementarna przeliczalna (rzut monetą aż do otrzymania orła)

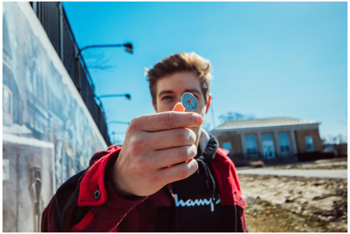


- $\Omega = \{\{o\}, \{ro\}, \{rro\}, \{rrro\}, \ldots\}$
- $\mathcal{F}$ – zbiór wszystkich podzbiorów zbioru Ω
- k – liczba rzutów

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \mathbb{P}(\{o\}) = 0.5 \\
p_2 &= \mathbb{P}(\{ro\}) = 0.5 * 0.5 \\
&\vdots \\
p_k &= \mathbb{P}(\{rrr\ldots ro\}) = (0.5)^k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (CocaKolaLips)

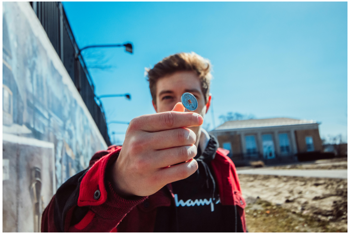
Prz. elementarna przeliczalna (rzut monetą aż do otrzymania orła)



- $p_k \geqslant 0$ dla $k \in \{1, 2, \ldots\}$
- $p_1 + p_2 + \ldots = 0.5 + (0.5)^2 + \ldots = 0.5 * \frac{1}{1-0.5} = 1$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (CocaKolaLips)

Prz. elementarna przeliczalna (rzut monetą aż do otrzymania orła)



- $p_k \geqslant 0$ dla $k \in \{1, 2, \dots\}$
- $p_1 + p_2 + \dots = 0.5 + (0.5)^2 + \dots = 0.5 * \frac{1}{1-0.5} = 1$

- A – zdarzenie polegające na wykonaniu parzystej liczby rzutów

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\{i\colon i \text{ jest parzysty}\}} p_i =$$
$$= p_2 + p_4 + p_6 + \dots =$$
$$= (0.5)^2 + (0.5)^4 + (0.5)^6 + \dots = \frac{1}{3}$$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (CocaKolaLips)