

# Podstawy matematyczne obliczeń kwantowych i SI

**Hanna Wojewódka-Ściążko**

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk



# Akademia Sztuki Kwantowej: Szkolenia z obliczeń kwantowych i SI kreujące innowacyjne społeczeństwo



## ❖ Akademia Sztuki Kwantowej

*Projekt finansowany ze środków budżetu państwa, przyznanych przez Ministra Edukacji i Nauki w ramach Programu „Nauka dla Społeczeństwa II”*

- ▶ Numer projektu: **NdS-II/SP/0222/2024/01**
- ▶ Termin realizacji: **od 03/04/2024 do 03/04/2026**
- ▶ Źródło finansowania: **Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego**
- ▶ Nazwa programu i moduł: **Nauka dla Społeczeństwa II**



## ✦ Misja Akademii Sztuki Kwantowej

- ▶ Projekt jest pilotażowy i jego **głównym zadaniem jest przybliżyć społeczeństwu zaawansowane koncepcje i idee naukowe z pogranicza obliczeń kwantowych i sztucznej inteligencji.**



## ✦ Misja Akademii Sztuki Kwantowej

- ▶ Projekt jest pilotażowy i jego **głównym zadaniem jest przybliżyć społeczeństwu zaawansowane koncepcje i idee naukowe z pogranicza obliczeń kwantowych i sztucznej inteligencji.**
- ▶ Nasz program pomyślany i zorganizowany został w formie wykładów oraz interaktywnych szkoleń z zakresu programowania komputerów kwantowych oraz sztucznej inteligencji.



# Tematyka szkoleń



## Obliczenia i algorytmy kwantowe

- ▶ Uczestnicy zapoznają się z **obliczeniami kwantowymi** od podstawowych zasad po zaawansowane algorytmy.
- ▶ Program szkolenia obejmuje: podstawy **fizyki kwantowej** (stany i pomiary kwantowe, bramki kwantowe, układy złożone), **informację kwantową**, **kwantowe gęste kodowanie**, teleportację kwantową oraz kryptografię kwantową.



## Uczenie maszynowe

- ▶ Uczestnicy zostaną wprowadzeni do **klasycznego (nie-kwantowego) uczenia maszynowego**.
- ▶ Nacisk będzie położony na zrozumienie istoty działania metod i ich praktyczne zastosowanie (od analizy danych, przez **sieci neuronowe**, po klasyczne modele, takie jak **SVM**).
- ▶ **Materiał stanowi klasyczną podstawę metod kwantowych**, szczególnie kwantowych sieci neuronowych i kwantowych metod jądrowych.





## Uczenie architektur kwantowych

- ▶ Uczestnicy nauczą się **implementować kwantowy model perceptronu**.
- ▶ Poznają teoretyczne podstawy, w tym **brankowy model obliczeń kwantowych**, oraz będą mieć **możliwość programowania na komputerze kwantowym**, co umożliwi im samodzielną pracę z kwantowymi modelami obliczeniowymi.



## ❖ Kwantowe sieci neuronowe i kwantowe metody jądrowe

- ▶ Szkolenie pokaże, jak **komputery kwantowe mogą rozwiązywać problemy uczenia maszynowego** (teoretycznie – szybciej niż te tradycyjne).
- ▶ Zajęcia obejmują m.in. **tworzenie klasyfikatorów i regresorów działających na prawdziwych danych** za pomocą komputerów kwantowych.



## ❖ Kwantowe wyzwanie kombinatorycznych problemów optymalizacyjnych

- ▶ Szkolenie będzie w dużej mierze poświęcone **adiabatycznym obliczeniom kwantowym** i **algorytmom inspirowanym fizyką**, ze szczególnym uwzględnieniem **procesora kwantowego D-Wave**.
- ▶ Tematy obejmą **matematyczne modele optymalizacyjne (QUBO / Ising)**, **topologię procesora** oraz **ewolucję adiabatyczną układu kwantowego**.



# Plan szkoleń



# ❖ Ramowy plan szkoleń w ASK

## I ETAP

Wykłady online mające na celu dostarczenie uczestnikom solidnych podstaw teoretycznych, obejmujących m.in.

- ▶ Elementy rachunku prawdopodobieństwa.
- ▶ Elementy statystyki matematycznej.
- ▶ Podstawy uczenia maszynowego.
  
- ▶ Elementy algebry liniowej.
- ▶ Algorytmy numeryczne znajdujące minimum lokalne zadanej funkcji celu.
- ▶ Wprowadzenie do obliczeń kwantowych.
- ▶ Algorytmy kwantowe.

# ❖ Ramowy plan szkoleń w ASK

## I ETAP

Wykłady online mające na celu dostarczenie uczestnikom solidnych podstaw teoretycznych, obejmujących m.in.

- ▶ Elementy rachunku prawdopodobieństwa.
- ▶ Elementy statystyki matematycznej.
- ▶ Podstawy uczenia maszynowego.
  
- ▶ Elementy algebry liniowej.
- ▶ Algorytmy numeryczne znajdujące minimum lokalne zadanej funkcji celu.
- ▶ Wprowadzenie do obliczeń kwantowych.
- ▶ Algorytmy kwantowe.

# ❖ Ramowy plan szkoleń w ASK

## I ETAP

Wykłady online mające na celu dostarczenie uczestnikom solidnych podstaw teoretycznych, obejmujących m.in.

- ▶ Elementy rachunku prawdopodobieństwa.
- ▶ Elementy statystyki matematycznej.
- ▶ Podstawy uczenia maszynowego.
  
- ▶ Elementy algebry liniowej.
- ▶ Algorytmy numeryczne znajdujące minimum lokalne zadanej funkcji celu.
- ▶ Wprowadzenie do obliczeń kwantowych.
- ▶ Algorytmy kwantowe.

## ❖ Ramowy plan szkoleń w ASK

### II ETAP

Warsztaty teoretyczno-praktyczne, które pozwolą uczestnikom na rozwijanie umiejętności związanych z implementacją nowoczesnych rozwiązań technicznych.

Zakres tematyczny szkoleń:

- ▶ Uczenie maszynowe.
- ▶ Uczenie architektur kwantowych.





## ❖ Ramowy plan szkoleń w ASK

### III ETAP

Warsztaty i projekty zespołowe, które integrują zdobytą wiedzę i umiejętności, a także sprzyjają nawiązaniu trwałej współpracy między specjalistami z różnych dziedzin.

Zakres tematyczny szkoleń:

- ▶ Kwantowe sieci neuronowe i kwantowe metody jądrowe.
- ▶ Kwantowe wyżarzanie kombinatorycznych problemów optymalizacyjnych.



# Wykłady online



Gdzie można znaleźć nagrania?



# Wykłady online

akademia.iitis.pl/event/7/

Publiczne Europe/Warsaw H. Wojew

## I etap szkoleń Akademii Sztuki Kwantowej - termin I

7 gru 2024, 11:00 → 11 sty 2025, 17:00 Europe/Warsaw

grafik\_wykladow\_o... kadra\_dydaktyczna... opis\_blokow\_temat...

**SOBOTA, 7 GRUDNIA**

**11:00 → 12:30 Podstawy matematyczne obliczeń kwantowych i SI** 1h 30min

Zapoznanie z wykładownicą i wprowadzenie do następujących czterech bloków tematycznych:

1. Elementy rachunku prawdopodobieństwa.
2. Elementy statystyki matematycznej.
3. Elementy algebry liniowej.
4. Algorytmy numeryczne znajdujące minimum lokalne zadanej funkcji celu.

Wskazanie, w jakim stopniu i dlaczego będą one istotne realizacji dalszej treści szkoleń.

Udostępnienie (na okres 5 tygodni) nagrań około 8h wykładów dotyczących następujących zagadnień (wykłady będą udostępniane stopniowo):

Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej:

- 1.1. Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą przestrzeni probabilistycznej.
- 1.2. Zmienna losowa - intuicje, przykłady, formalna definicja.



# Wykłady online

akademia.iitis.pl/event/7/



Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej:

- 1.1. Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą przestrzeni probabilistycznej.
- 1.2. Zmienna losowa - intuicje, przykłady, formalna definicja.
- 1.3. Typowe rozkłady prawdopodobieństwa (w tym rozkład normalny).
- 1.4. Zmienne losowe niezależne.
- 1.5. Centralne twierdzenie graniczne.
- 1.6. Rozkład t Studenta.

Elementy statystyki matematycznej:

- 2.1. Teoretyczne podstawy wnioskowania statystycznego.
- 2.2. Weryfikacja hipotez statystycznych: parametryczne testy istotności (przykład – test t); testy różnicy średnich dla obserwacji powiązanych w parę (przykłady – sparowany test t i test Wilcoxon dla par obserwacji); testy zgodności, testy normalności rozkładu (przykład – test normalności Shapiro-Wilka).

Elementy algebry liniowej:

- 3.1. Liczby zespolone.
- 3.2. Przestrzeń wektorowa, pojęcie iloczynu skalarnego.
- 3.3. Notacja Diraca.
- 3.4. Macierze i działania na macierzach.
- 3.5. Wektory i wartości własne macierzy.

Algorytmy numeryczne znajdujące minimum lokalne zadanej funkcji celu:

- 4.1. Pojęcie gradientu.
- 4.2. Metoda spadku wzdłuż gradientu.
- 4.3. Metoda stochastycznego spadku wzdłuż gradientu.

**Mówca:** Hanna Wojewódka Ściążko (IITIS)



Elementy rachunku ...



Elementy rachunku ...



Elementy statystyki ...



Elementy statystyki ...



W jakiej kolejności odtwarzać nagrania?



## Wykłady online – rekomendowana kolejność odsłuchiwania

- ▶ **Elementy rachunku prawdopodobieństwa.**
- ▶ **Elementy statystyki matematycznej.**
- ▶ Podstawy uczenia maszynowego.
  
- ▶ **Elementy algebry liniowej.**
- ▶ **Algorytmy numeryczne znajdujące minimum lokalne zadanej funkcji celu.**
- ▶ Wprowadzenie do obliczeń kwantowych.
- ▶ Algorytmy kwantowe.



Czy można zadawać pytania do wykładów?





## Wykłady online – sesja Q&A

- ▶ Pytania można kierować na adres **akademia@iitis.pl**.



## Wykłady online – sesja Q&A

- ▶ Pytania można kierować na adres **akademia@iitis.pl**.
- ▶ Nasi prowadzący odpowiedzą na nie w czasie naszego kolejnego spotkania, które odbędzie się dnia 11 stycznia 2025r.



# Podstawy matematyczne obliczeń kwantowych i SI



## Elementy rachunku prawdopodobieństwa



## Elementy rachunku prawdopodobieństwa

- ▶ Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą **przestrzeni probabilistycznej**.
- ▶ **Zmienna losowa**, jej rozkład i dystrybuanta.
- ▶ Zmienna losowa dyskretna i absolutnie ciągła.
- ▶ **Centralne twierdzenie graniczne**.

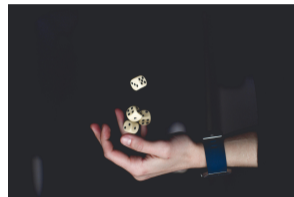


## Elementy rachunku prawdopodobieństwa

- ▶ Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą **przestrzeni probabilistycznej**.
- ▶ **Zmienna losowa**, jej rozkład i dystrybuanta.
- ▶ Zmienna losowa dyskretna i absolutnie ciągła.
- ▶ **Centralne twierdzenie graniczne**.



## Doświadczenia losowe



Źródło: <https://unsplash.com/> (ZSun Fu), <https://www.pexels.com/> (lil artsy, Tima Miroshnichenko)



## ❖ Model matematyczny (dla rzutu symetryczną kostką do gry)



- ▶ Określamy **możliwe wyniki doświadczenia**:

1, 2, 3, 4, 5, 6.





## ❖ Model matematyczny (dla rzutu symetryczną kostką do gry)



- ▶ Określamy **możliwe wyniki doświadczenia**:

1, 2, 3, 4, 5, 6.

- ▶ Wypisujemy wszystkie interesujące nas **zdarzenia losowe**:

1, {1, 3, 5}, {1, 2, 3, 4, 5}, ...



## ❖ Model matematyczny (dla rzutu symetryczną kostką do gry)



- ▶ Określamy **możliwe wyniki doświadczenia**:

1, 2, 3, 4, 5, 6.

- ▶ Wypisujemy wszystkie interesujące nas **zdarzenia losowe**:

1, {1, 3, 5}, {1, 2, 3, 4, 5}, ...

- ▶ Przypisujemy im **prawdopodobieństwa**:

$$\begin{array}{l} 1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{6}, \\ \{1, 3, 5\} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}, \\ \dots \end{array}$$


Źródło: <https://www.pexels.com/> (Pixabay)

## Elementy rachunku prawdopodobieństwa

- ▶ Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą **przestrzeni probabilistycznej**.
- ▶ **Zmienna losowa**, jej rozkład i dystrybuanta.
- ▶ Zmienna losowa dyskretna i absolutnie ciągła.
- ▶ **Centralne twierdzenie graniczne**.



## ❖ Zmienna losowa

### Zmienna losowa

To funkcja rzeczywista  $X$ , która każdemu możliwemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje wartość rzeczywistą.

Źródło: <https://www.pexels.com/> (Pixabay)



## ❖ Zmienna losowa

### Zmienna losowa

To funkcja rzeczywista  $X$ , która każdemu możliwemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje wartość rzeczywistą.



► Reguły gry:  $o \mapsto 5 \text{ zł}$ ,  $r \mapsto -1 \text{ zł}$

Źródło: <https://www.pexels.com/> (Pixabay)



## ❖ Zmienna losowa

### Zmienna losowa

To funkcja rzeczywista  $X$ , która każdemu możliwemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje wartość rzeczywistą.



- ▶ Reguły gry:  $o \mapsto 5 \text{ zł}$ ,  $r \mapsto -1 \text{ zł}$
- ▶ Zmienna losowa  $X$ :

$$X(\{o\}) = 5, \quad X(\{r\}) = -1$$

Źródło: <https://www.pexels.com/> (Pixabay)



## Elementy rachunku prawdopodobieństwa

- ▶ Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą **przestrzeni probabilistycznej**.
- ▶ **Zmienna losowa**, jej rozkład i dystrybuanta.
- ▶ Zmienna losowa dyskretna i absolutnie ciągła.
- ▶ **Centralne twierdzenie graniczne**.



## ❖ Zmienne losowe dyskretne a zmienne losowe ciągłe



Źródło: <https://unsplash.com/> (Alexander Grey, Matteo Fusco)





## ❖ Zmienne losowe dyskretne a zmienne losowe ciągłe



Źródło: <https://unsplash.com/> (Alexander Grey, Matteo Fusco)



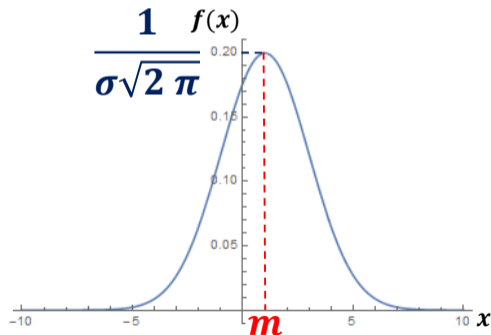
## ❖ Rozkład **normalny** z parametrami $m$ i $\sigma^2$

- ▶ Odgrywa ważną rolę **w statystyce**.
- ▶ Jest wykorzystywany **w naukach przyrodniczych i społecznych**.



## ❖ Rozkład normalny z parametrami $m$ i $\sigma^2$

- ▶ Odgrywa ważną rolę **w statystyce**.
- ▶ Jest wykorzystywany **w naukach przyrodniczych i społecznych**.



## Elementy rachunku prawdopodobieństwa

- ▶ Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą **przestrzeni probabilistycznej**.
- ▶ **Zmienna losowa**, jej rozkład i dystrybuanta.
- ▶ Zmienna losowa dyskretna i absolutnie ciągła.
- ▶ **Centralne twierdzenie graniczne**.



## Centralne twierdzenie graniczne

### Centralne twierdzenie graniczne

Dany jest ciąg

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

## Centralne twierdzenie graniczne

### Centralne twierdzenie graniczne

Dany jest ciąg

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie  
(zmiennie mają jednakowe wartości oczekiwane i wariancje:

$$\mathbb{E}(X_1) = \dots = \mathbb{E}(X_n) = m, \quad D^2(X_1) = \dots = D^2(X_n) = \sigma^2)$$

## Centralne twierdzenie graniczne

### Centralne twierdzenie graniczne

Dany jest ciąg

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

**niezależnych** zmiennych losowych o **jednakowym rozkładzie**  
(zmiennie mają jednakowe wartości oczekiwane i wariancje:

$$\mathbb{E}(X_1) = \dots = \mathbb{E}(X_n) = m, \quad D^2(X_1) = \dots = D^2(X_n) = \sigma^2)$$

**Wówczas dla odpowiednio dużych  $n$  rozkład zmiennej losowej**

$$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

**można przybliżyć rozkładem normalnym  $\mathcal{N}(nm, \sigma^2 n)$ .**

## Elementy statystyki matematycznej





## Elementy statystyki matematycznej

- ▶ Statystyka opisowa a statystyka matematyczna.
- ▶ Teoretyczne podstawy wnioskowania statystycznego.
- ▶ **Weryfikacja hipotez statystycznych.**
- ▶ Testy różnicy średnich dla obserwacji powiązanych w pary. **Sparowany test  $t$  i test Wilcoxon dla par obserwacji.**
- ▶ Testy zgodności. Testy normalności rozkładu. **Test Shapiro-Wilka.**



## Elementy statystyki matematycznej

- ▶ Statystyka opisowa a statystyka matematyczna.
- ▶ Teoretyczne podstawy wnioskowania statystycznego.
- ▶ **Weryfikacja hipotez statystycznych.**
- ▶ Testy różnicy średnich dla obserwacji powiązanych w pary. **Sparowany test  $t$  i test Wilcoxon dla par obserwacji.**
- ▶ Testy zgodności. Testy normalności rozkładu. **Test Shapiro-Wilka.**



# Statystyka opisowa a statystyka matematyczna



Źródło: <https://www.pexels.com/> (cottonbro studio)



## Elementy statystyki matematycznej

- ▶ Statystyka opisowa a statystyka matematyczna.
- ▶ Teoretyczne podstawy wnioskowania statystycznego.
- ▶ **Weryfikacja hipotez statystycznych.**
- ▶ Testy różnicy średnich dla obserwacji powiązanych w pary. **Sparowany test  $t$  i test Wilcoxon dla par obserwacji.**
- ▶ Testy zgodności. Testy normalności rozkładu. **Test Shapiro-Wilka.**



## Statystyczna próba losowa



Źródło: <https://www.pexels.com/> (Vladimir Blyufer)



## Statystyczna próba losowa



- ▶ zmienna losowa  $X$  – opisuje badaną cechę zbiorowości statystycznej

Źródło: <https://www.pexels.com/> (Vladimir Blyufer)



## Statystyczna próba losowa



- ▶ zmienna losowa  $X$  – opisuje badaną cechę zbiorowości statystycznej
- ▶ ciąg niezależnych zmiennych losowych  $\{X_1, \dots, X_n\}$  – opisuje  $n$ -elementową próbę statystyczną

Źródło: <https://www.pexels.com/> (Vladimir Blyufer)



## Elementy statystyki matematycznej

- ▶ Statystyka opisowa a statystyka matematyczna.
- ▶ Teoretyczne podstawy wnioskowania statystycznego.
- ▶ **Weryfikacja hipotez statystycznych.**
- ▶ Testy różnicy średnich dla obserwacji powiązanych w pary. **Sparowany test  $t$  i test Wilcoxon dla par obserwacji.**
- ▶ Testy zgodności. Testy normalności rozkładu. **Test Shapiro-Wilka.**





# ❖ Ogólna procedura testowania hipotez



## ❖ Ogólna procedura testowania hipotez

1. Sformułuj hipotezę zerową  $H_0$  i hipotezę alternatywną  $H_1$ , oraz zdecyduj, czy należy użyć testu jednostronnego, czy dwustronnego.



## ❖ Ogólna procedura testowania hipotez

1. Sformułuj hipotezę zerową  $H_0$  i hipotezę alternatywną  $H_1$ , oraz zdecyduj, czy należy użyć **testu jednostronnego, czy dwustronnego**.
2. Wybierz odpowiedni poziom istotności  $\alpha$  w zależności od wiarygodności oszacowań oraz dopuszczalnego ryzyka ( $\alpha$  musi być ustalona z góry, przed pobraniem próby).



## ❖ Ogólna procedura testowania hipotez

1. Sformułuj hipotezę zerową  $H_0$  i hipotezę alternatywną  $H_1$ , oraz zdecyduj, czy należy użyć testu jednostronnego, czy dwustronnego.
2. Wybierz odpowiedni poziom istotności  $\alpha$  w zależności od wiarygodności oszacowań oraz dopuszczalnego ryzyka ( $\alpha$  musi być ustalona z góry, przed pobraniem próby).
3. Oblicz statystykę testową i porównaj jej wartość z wartością krytyczną dla tej statystyki na poziomie istotności  $\alpha$ .



## ❖ Ogólna procedura testowania hipotez

1. Sformułuj hipotezę zerową  $H_0$  i hipotezę alternatywną  $H_1$ , oraz zdecyduj, czy należy użyć **testu jednostronnego, czy dwustronnego**.
2. Wybierz odpowiedni poziom istotności  $\alpha$  w zależności od wiarygodności oszacowań oraz dopuszczalnego ryzyka ( $\alpha$  musi być ustalona z góry, przed pobraniem próby).
3. **Oblicz statystykę testową i porównaj jej wartość z wartością krytyczną dla tej statystyki na poziomie istotności  $\alpha$ .**
4. **Zdecyduj, czy przyjmujesz hipotezę zerową  $H_0$ , czy ją odrzucasz (i wówczas przyjmujesz hipotezę alternatywną  $H_1$ ).**



## Elementy statystyki matematycznej

- ▶ Statystyka opisowa a statystyka matematyczna.
- ▶ Teoretyczne podstawy wnioskowania statystycznego.
- ▶ **Weryfikacja hipotez statystycznych.**
- ▶ Testy różnicy średnich dla obserwacji powiązanych w pary. **Sparowany test  $t$  i test Wilcoxon dla par obserwacji.**
- ▶ Testy zgodności. Testy normalności rozkładu. **Test Shapiro-Wilka.**



## Elementy statystyki matematycznej

- ▶ Statystyka opisowa a statystyka matematyczna.
- ▶ Teoretyczne podstawy wnioskowania statystycznego.
- ▶ **Weryfikacja hipotez statystycznych.**
- ▶ Testy różnicy średnich dla obserwacji powiązanych w pary. **Sparowany test  $t$  i test Wilcoxon dla par obserwacji.**
- ▶ Testy zgodności. Testy normalności rozkładu. **Test Shapiro-Wilka.**



## ❖ Testy statystyczne w *Pythonie*



Źródło: <https://unsplash.com/> (Kevin Ku)





# Elementy algebry liniowej



## Elementy algebry liniowej

- ▶ Liczby zespolone.
- ▶ **Wektory. Iloczyn skalarny wektorów.** Notacja Diraca.
- ▶ **Baza** i wymiar przestrzeni wektorowej. Norma euklidesowa. Wektory **unormowane** i **ortogonalne**.
- ▶ **Macierze** i działania wykonywane na macierzach.



## Elementy algebry liniowej

- ▶ Liczby zespolone.
- ▶ **Wektory. Iloczyn skalarny wektorów.** Notacja Diraca.
- ▶ **Baza** i wymiar przestrzeni wektorowej. Norma euklidesowa. Wektory **unormowane** i **ortogonalne**.
- ▶ **Macierze** i działania wykonywane na macierzach.



## ❖ Liczba zespolona – definicja

### Definicja

**Jednostką urojoną** nazywamy taką liczbę  $i$ , dla której  $i^2 = -1$ .



## ❖ Liczba zespolona – definicja

### Definicja

**Jednostką urojoną** nazywamy taką liczbę  $i$ , dla której  $i^2 = -1$ .

### Definicja

**Liczbą zespoloną** nazywamy dowolną liczbę  $z$  taką, że

$$z = a + bi,$$

gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi.

## ❖ Liczba zespolona – definicja

### Definicja

**Jednostką urojoną** nazywamy taką liczbę  $i$ , dla której  $i^2 = -1$ .

### Definicja

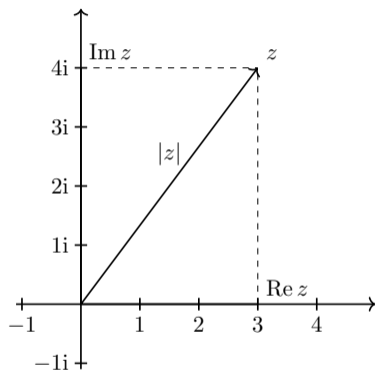
**Liczbą zespoloną** nazywamy dowolną liczbę  $z$  taką, że

$$z = a + bi,$$

gdzie  $a$  i  $b$  są liczbami rzeczywistymi.

- ▶ Liczbę rzeczywistą  $a$  nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby  $z$  (oznaczenie:  $\operatorname{Re} z$ ).
- ▶ Liczbę rzeczywistą  $b$  nazywamy **częścią urojoną** liczby  $z$  (oznaczenie:  $\operatorname{Im} z$ ).

## Liczba zespolona – interpretacja graficzna



Rysunek: Płaszczyzna zespolona  $\mathbb{C}$  oraz liczba zespolona  $z = 3 + 4i$  (na końcu strzałki).



## Elementy algebry liniowej

- ▶ Liczby zespolone.
- ▶ **Wektory. Iloczyn skalarny wektorów. Notacja Diraca.**
- ▶ **Baza** i wymiar przestrzeni wektorowej. Norma euklidesowa. Wektory **unormowane** i **ortogonalne**.
- ▶ **Macierze** i działania wykonywane na macierzach.





## Wektor $n$ -wymiarowy i notacja Diraca

### Wektor $n$ -wymiarowy

$n$ -wymiarowym wektorem  $\mathbf{v}$  nazywamy uporządkowaną tablicę  $n$  liczb:  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

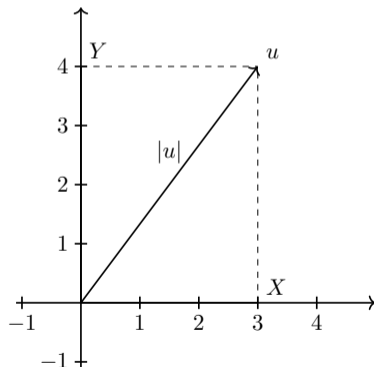
$$|u\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (\text{postać kolumnowa}) \quad \langle u| = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \quad (\text{postać wierszowa})$$



## Szczególny przypadek: wektor dwuwymiarowy

Dwuwymiarowy wektor  $|u\rangle$  możemy jednoznacznie określić przez:

- ▶ jego **moduł**  $|u|$  (długość)
- ▶ oraz **kąt, jaki tworzy on z osią  $X$**  (kierunek wraz ze zwrotem),



## Elementy algebry liniowej

- ▶ Liczby zespolone.
- ▶ **Wektory. Iloczyn skalarny wektorów.** Notacja Diraca.
- ▶ **Baza** i wymiar przestrzeni wektorowej. Norma euklidesowa. Wektory **unormowane** i **ortogonalne**.
- ▶ **Macierze** i działania wykonywane na macierzach.



## Elementy algebry liniowej

- ▶ Liczby zespolone.
- ▶ **Wektory. Iloczyn skalarny wektorów.** Notacja Diraca.
- ▶ **Baza** i wymiar przestrzeni wektorowej. Norma euklidesowa. Wektory **unormowane** i **ortogonalne**.
- ▶ **Macierze** i działania wykonywane na macierzach.



# Macierz

## Definicja

**Macierzą** nazywamy **prostokątną tablicę liczb** (rzeczywistych bądź zespolonych), symboli lub wyrażeń.



# Macierz

## Definicja

**Macierzą** nazywamy **prostokątną tablicę liczb** (rzeczywistych bądź zespolonych), symboli lub wyrażeń.

## Przykład

Przykład macierzy o wymiarach  $m \times n$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$