Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy

To **pewna liczba (lub ogólniej wartość) przypisywana macierzy kwadratowej** A i oznaczana symbolem $\det(A)$ lub $|A|$.

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy

To **pewna liczba (lub ogólniej wartość) przypisywana macierzy kwadratowej** A i oznaczana symbolem $\det(A)$ lub $|A|$.

Wartość ta jest otrzymywana przez odpowiednie przemnożenie i dodawanie wartości macierzy. (wyznacznik macierzy należy traktować jako funkcję nie samej macierzy, a jej współczynników)

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy

To **pewna liczba (lub ogólniej wartość) przypisywana macierzy kwadratowej** A i oznaczana symbolem $\det(A)$ lub $|A|$.

Wartość ta jest otrzymywana przez odpowiednie przemnożenie i dodawanie wartości macierzy. (wyznacznik macierzy należy traktować jako funkcję nie samej macierzy, a jej współczynników)

W ogólności możemy wprowadzić definicję permutacyjną, rekurencyjną bądź aksjomatyczną wyznacznika macierzy.

Wyznacznik macierzy

Wyznaczniki macierzy wymiarów 1×1 i 2×2

- $$\text{Dla } A = [a_{11}] : \qquad \det(A) = a_{11}.$$

Wyznacznik macierzy

Wyznaczniki macierzy wymiarów 1×1 i 2×2

- $$\text{Dla } A = [a_{11}] : \quad \det(A) = a_{11}.$$
- $$\text{Dla } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Wyznacznik macierzy

Wyznaczniki macierzy wymiarów 3×3

- $$\text{Dla } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}:$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Wyznacznik macierzy

Przykłady

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 - (-6) = 7$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 + (-2) - 2 - 0 - 2 = -6$$

Wektory i wartości własne

Wartość własna i wektor własny macierzy

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest **wartością własną** macierzy A, jeśli istnieje taki niezerowy wektor n-elementowy $|v\rangle$, że

$$A\,|v\rangle = \lambda\,|v\rangle\,.$$

Wartość własna i wektor własny macierzy

Definicja

Niech A będzie macierzą kwadratową $n \times n$. Mówimy, że $\lambda \in \mathbb{C}$ jest **wartością własną** macierzy A, jeśli istnieje taki niezerowy wektor n-elementowy $|v\rangle$, że

$$A|v\rangle = \lambda|v\rangle .$$

Wektor $|v\rangle$ jest wtedy nazywany **wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej** λ.

Wartość własna i wektor własny macierzy

Uwaga

Równanie

$$A\left|v\right\rangle = \lambda\left|v\right\rangle,$$

równoważne rówaniu

$$\left(A - \lambda I_n\right)\left|v\right\rangle = 0.$$

posiada nietrywialne rozwiązanie $\left|v\right\rangle \neq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det\left(A - \lambda I_n\right) = 0.$$

Równanie charakterystyczne i wielomian charakterystyczny macierzy A

Równanie charakterystyczne i wielomian charakterystyczny macierzy A

Równanie

$$\det\left(A - \lambda I_n\right) = 0$$

nazywamy **równaniem charakterystycznym macierzy A**, zaś

$$W(\lambda) = \det\left(A - \lambda I_n\right)$$

wielomianem charakterystycznym macierzy A.

Wketory i wartości własne – przykład

Przykład

Rozważmy macierz

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Wketory i wartości własne – przykład

Przykład

Rozważmy macierz

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mamy

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix},$$

Wketory i wartości własne – przykład

Przykład

Rozważmy macierz

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mamy

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix},$$

gdzie wyznacznik tej macierzy to

$$(6-\lambda)(5-\lambda) - 2 * 3 = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$

Wketory i wartości własne – przykład

Przykład

Rozważmy macierz

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Mamy

$$\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix},$$

gdzie wyznacznik tej macierzy to

$$(6-\lambda)(5-\lambda) - 2 * 3 = \lambda^2 - 11\lambda + 24,$$

a zatem wartości własne rozważanej macierzy to $\lambda = 3$ i $\lambda = 8$.

Wektory i wartości własne – przykład

Dla wartości własnej $\lambda = 3$ wyliczamy odpowiadający jej wektor własny

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Wektory i wartości własne – przykład

Dla wartości własnej $\lambda = 3$ wyliczamy odpowiadający jej wektor własny

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Po przyrównaniu obu współrzędnych do zera otrzymujemy np. $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$,

Wektory i wartości własne – przykład

Dla wartości własnej $\lambda = 3$ wyliczamy odpowiadający jej wektor własny

$$\begin{bmatrix} 6-\lambda & 3 \\ 2 & 5-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

Po przyrównaniu obu współrzędnych do zera otrzymujemy np. $x_1 = 1$ i $x_2 = -1$, a zatem wektor własny odpowiadający wartości własnej $\lambda = 3$ to

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Wektory i wartości własne macierzy hermitowskich

Definicja

Macierz kwadratową, która jest **równa macierzy będącej jej sprzężeniem hermitowskim**, tj.

$$A = A^\dagger$$

nazywamy **macierzą hermitowską**.

Wektory i wartości własne macierzy hermitowskich

Uwaga

- Macierz hermitowska ma rzeczywiste wartości własne.

Wektory i wartości własne macierzy hermitowskich

Uwaga

- Macierz hermitowska ma rzeczywiste wartości własne.
- Dowolną macierz hermitowską A możemy zapisać w postaci $A = U\Lambda U^\dagger$, gdzie Λ jest macierzą diagonalną, która na przekątnej ma wartości własne macierzy A, tj.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

oraz U jest pewną macierzą unitarną (o tym samym wymiarze co macierz A).

Bibliografia

Wykład i slajdy zostały przygotowane w oparciu o następującą literaturę:

[1] P. Gawron, M. Cholewa, K. Kara, *Rewolucja stanu: fantastyczne wprowadzenie do informatyki kwantowej*, Gliwice: Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk, 2016 `https://open.icm.edu.pl/handle/123456789/16807`.

[2] Marc Peter Deisenroth, A. Aldo Faisal, and Cheng Soon Ong*Mathematics for Machine Learning*, Cambridge University Press, 2020, `https://mml-book.github.io/`.