Podstawy matematyczne obliczeń kwantowych i SI

Hanna Wojewódka-Ściążko

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk

11 stycznia 2025

AKADEMIA SZTUKI KWANTOWEJ

Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

NAUKA DLA SPOŁECZEŃSTWA

IITiS

Akademia Sztuki Kwantowej: Szkolenia z obliczeń kwantowych i SI kreujące innowacyjne społeczeństwo

Projekt finansowany ze środków budżetu państwa, przyznanych przez Ministra Edukacji i Nauki w ramach Programu „Nauka dla Społeczeństwa II"

- Numer projektu: **NdS-II/SP/0222/2024/01**
- Termin realizacji: **od 03/04/2024 do 03/04/2026**
- Źródło finansowania: **Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego**
- Nazwa programu i moduł: **Nauka dla Społeczeństwa II**

I etap szkoleń – wykłady online

- Elementy rachunku prawdopodobieństwa.
- Elementy statystyki matematycznej.
- Podstawy uczenia maszynowego.

- Elementy algebry liniowej.
- Algorytmy numeryczne znajdujące minimum lokalne zadanej funkcji celu.
- Wprowadzenie do obliczeń kwantowych.
- Algorytmy kwantowe.

I etap szkoleń – wykłady online

INSTYTUT INFORMATYKI TEORETYCZNEJ i STOSOWANEJ
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
44-100 Gliwice, ul. Bałtycka 5, NIP 631-011-22-45
tel. +48 32 2317319, fax 2317026, REGON 000564702

Sugerowana kolejność odtwarzania dotychczas udostępnionych wykładów

Wykład otwierający Akademię Sztuki Kwantowej (wykład na żywo z dnia 7.12.24)

OBLICZENIA KWANTOWE (OK)	**KLASYCZNE UCZENIE MASZYNOWE (KUM)**
Elementy algebry liniowej – cz. 1	Elementy rachunku prawdopodobieństwa – cz. 1
Elementy algebry liniowej – cz. 2	Elementy rachunku prawdopodobieństwa – cz. 2
	Elementy statystyki matematycznej – cz. 1
	Elementy statystyki matematycznej – cz. 2
Wykład otwierający blok tematyczny OK (wykład na żywo z dnia 7.12.24)	Wykład otwierający blok tematyczny KUM (wykład na żywo z dnia 7.12.24)
Wprowadzenie do obliczeń kwantowych	Perceptron
Pomiary kwantowe	Sieci MLP
Informacja klasyczna i kwantowa	Sieci MLP (analiza)
Zakaz klonowania	Statystyczne metody uczenia maszynowego – wprowadzenie
Kryptografia	Statystyczne metody uczenia maszynowego

I etap szkoleń – wykłady online

- Elementy rachunku prawdopodobieństwa.
- Elementy statystyki matematycznej.
- Podstawy uczenia maszynowego.

- Elementy algebry liniowej.
- Algorytmy numeryczne znajdujące minimum lokalne zadanej funkcji celu.

  pytania: **piotr@piotrgawron.eu**
- Wprowadzenie do obliczeń kwantowych.
- Algorytmy kwantowe.

Ankieta oceny jakości szkoleń Akademii Sztuki Kwantowej

II etap szkoleń – warsztaty teoretyczno-praktyczne (wstępny grafik)

Uczenie maszynowe

- Toruń, 31.05-1.06.25;
- Kraków, 13-14.09.25;
- Warszawa, 4-5.10.25.

Uczenie architektur kwantowych

- Toruń, 5-6.04.25;
- Chorzów, 24-25.05.25;
- Poznań, 20-21.09.25.

III etap szkoleń – warsztaty i projekty zespołowe (wstępny grafik)

Kwantowe sieci neuronowe i kwantowe metody jądrowe

- Kraków, 18-19.10.25;
- Warszawa, 15-16.11.25;
- Gdańsk, 14-15.03.26.

Kwantowe wyżarzanie kombinatorycznych problemów optymalizacyjnych

- Chorzów, 4-5.10.25;
- Poznań, 17-18.01.26;
- Gdańsk, 21-22.03.26.

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Elementy rachunku prawdopodobieństwa

- Modelowanie doświadczenia losowego za pomocą **przestrzeni probabilistycznej**.
- **Zmienna losowa**, jej rozkład i dystrybuanta.
- Zmienna losowa dyskretna i absolutnie ciągła.
- **Centralne twierdzenie graniczne**.

Przestrzeń probabilistyczna

Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, składającą się z:

- niepustego zbioru Ω (przestrzeń zdarzeń elementarnych),
- odpowiedniego zbioru $\mathcal{F}$ (przestrzeń zdarzeń losowych) podzbiorów zbioru Ω,
- miary probabilistycznej, czyli funkcji $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, takiej że
  (1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
  (2) dla rozłącznych $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ zachodzi $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$.

Zmienna losowa

Zmienna losowa

Funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$, która **każdemu możliwemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje wartość rzeczywistą**.

Zmienna losowa

Zmienna losowa

Funkcja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, która **każdemu możliwemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje wartość rzeczywistą**.

Zmienna losowa dyskretna

Przyjmuje **tylko skończoną lub przeliczalną liczbę wartości**.

Zmienna losowa

Zmienna losowa

Funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$, która **każdemu możliwemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje wartość rzeczywistą**.

Zmienna losowa dyskretna

Przyjmuje **tylko skończoną lub przeliczalną liczbę wartości**.

Zmienna losowa ciągła

Teoretycznie **może przyjąć dowolną wartość z określonego przedziału**.

Przykłady dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa

Zmienna losowa dyskretna

- Rozkład zmiennej losowej X dyskretnej określamy wskazując pary (x_i, p_i) odpowiednio:
  - wartości tej zmiennej
  - i prawdopodobieństw, z jakimi są one przyjmowane $(p_i := \mathbb{P}(X = x_i))$.

Zmienna losowa dyskretna

- Rozkład zmiennej losowej X dyskretnej określamy wskazując pary (x_i, p_i) odpowiednio:
  - wartości tej zmiennej
  - i prawdopodobieństw, z jakimi są one przyjmowane $(p_i := \mathbb{P}(X = x_i))$.

  Zbiór tych par

$$\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots\}$$

  nazywamy bazą.

Zmienna losowa dyskretna

- Rozkład zmiennej losowej X dyskretnej określamy wskazując pary (x_i, p_i) odpowiednio:
  - wartości tej zmiennej
  - i prawdopodobieństw, z jakimi są one przyjmowane ($p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$).

  Zbiór tych par

$$\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots\}$$

nazywamy bazą.

x_1	x_2	x_3	$\ldots$
p_1	p_2	p_3	$\ldots$

Zmienna losowa dyskretna

- Rozkład zmiennej losowej X dyskretnej określamy wskazując pary (x_i, p_i) odpowiednio:
  - wartości tej zmiennej
  - i prawdopodobieństw, z jakimi są one przyjmowane ($p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$).

  Zbiór tych par

$$\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots\}$$

  nazywamy bazą.

x_1	x_2	x_3	$\ldots$
p_1	p_2	p_3	$\ldots$

- Dystrybuanta zmiennej losowej X dyskretnej:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \sum_{i\colon x_i \leqslant x} p_i.$$

Przykłady dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa

- Rozkład **dwupunktowy**.
- Rozkład **dwumianowy**.
- Rozkład **Poissona**.
- Rozkład **geometryczny**.

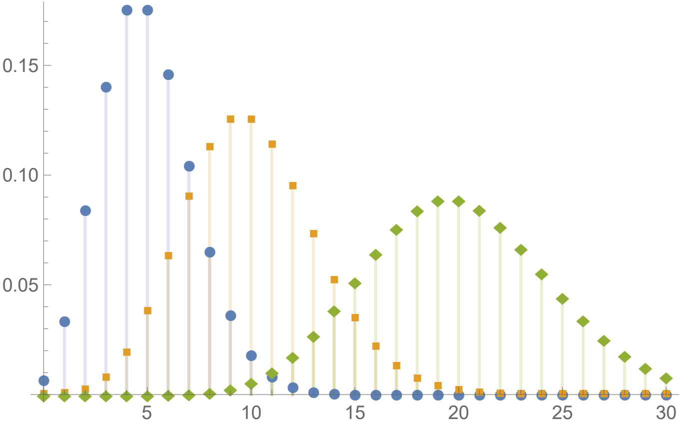
Rozkład **Poissona**

- Zmienna losowa X ma rozkład Poissona o parametrze $\lambda > 0$, jeśli X przyjmuje wartości ze zbioru $\{0, 1, 2, \ldots\}$ oraz

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda} \quad \text{dla każdego} \quad k \in \{0, 1, \ldots\}.$$

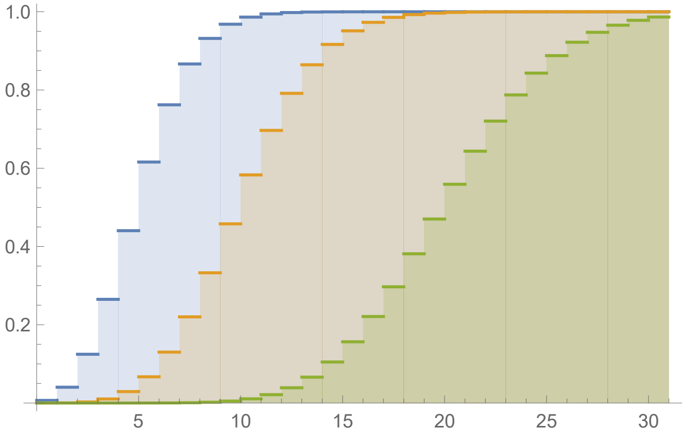
- Oznaczenie: $X \sim Pois(\lambda)$.

Rozkład Poissona



Rysunek: Rozkład Poissona (dla parametrów: $\lambda = 5$, $\lambda = 10$ i $\lambda = 20$).

Rozkład Poissona



Rysunek: Dystrybuanta rozkładu Poissona (dla parametrów: $\lambda = 5$, $\lambda = 10$ i $\lambda = 20$).

Rozkład Poissona

Uwaga

Rozkład Poissona jest zazwyczaj wykorzystywany w sytuacjach, w których liczymy wystąpienia pewnych zdarzeń w jednostce czasu lub przestrzeni.

Przykład

- Liczymy liczbę klientów, którzy odwiedzają dany sklep między 13:00 a 14:00.
- Na podstawie danych z poprzednich dni wiemy, że średnio 15 klientów odwiedza ten sklep między 13:00 a 14:00.
- Zmienna losowa $X \sim Pois(\lambda = 15)$ właściwie opisuje losową liczbę klientów w tym sklepie (między 13:00 a 14:00).

Rozkład Poissona

Przykład

Przyjmijmy, ze liczba wiadomości e-mail, które otrzymuje pewnien pracownik w ciągu dnia roboczego, może być modelowana za pomocą rozkładu Poissona, przy średniej liczbie $0,2$ wiadomości na minutę. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 5 minut nie otrzyma on żadnej wiadomości?*

Rozkład Poissona

Przykład

Przyjmijmy, ze liczba wiadomości e-mail, które otrzymuje pewnien pracownik w ciągu dnia roboczego, może być modelowana za pomocą rozkładu Poissona, przy średniej liczbie $0,2$ wiadomości na minutę. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 5 minut nie otrzyma on żadnej wiadomości?*

- Niech Y będzie zmienną losową opisującą liczbę wiadomości e-mail, które pracownik otrzymał w dowolnym pięciominutowym odstępie czasu.

Rozkład Poissona

Przykład

Przyjmijmy, ze liczba wiadomości e-mail, które otrzymuje pewnien pracownik w ciągu dnia roboczego, może być modelowana za pomocą rozkładu Poissona, przy średniej liczbie $0,2$ wiadomości na minutę. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 5 minut nie otrzyma on żadnej wiadomości?*

- Niech Y będzie zmienną losową opisującą liczbę wiadomości e-mail, które pracownik otrzymał w dowolnym pięciominutowym odstępie czasu.
- Wtedy $Y \sim Pois(\lambda)$ z $\lambda = 5(0,2) = 1$.

Rozkład Poissona

Przykład

Przyjmijmy, ze liczba wiadomości e-mail, które otrzymuje pewnien pracownik w ciągu dnia roboczego, może być modelowana za pomocą rozkładu Poissona, przy średniej liczbie $0,2$ wiadomości na minutę. *Jakie jest prawdopodobieństwo, że w ciągu 5 minut nie otrzyma on żadnej wiadomości?*

- Niech Y będzie zmienną losową opisującą liczbę wiadomości e-mail, które pracownik otrzymał w dowolnym pięciominutowym odstępie czasu.
- Wtedy $Y \sim Pois(\lambda)$ z $\lambda = 5(0,2) = 1$.
- Stąd

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{0!}\lambda^0 e^{-\lambda} = \frac{1}{0!}1^0 e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,3679.$$

Rozkład Poissona jako przybliżenie rozkładu dwumianowego

Uwaga

Rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$ można traktować jako granicę ciągu rozkładów dwumianowych z parametrami n i $p = \lambda/n$, $n \in \mathbb{N}$ (fakt ten często wykorzystuje się w praktyce, gdyż w wielu zastosowaniach rozkład Poissona jest wygodniejszy do obliczeń niż rozkład dwumianowy, zwłaszcza dla dużych wartości n).

Rozkład Poissona jako przybliżenie rozkładu dwumianowego

Uwaga

Rozkład Poissona z parametrem $\lambda > 0$ można traktować jako granicę ciągu rozkładów dwumianowych z parametrami n i $p = \lambda/n$, $n \in \mathbb{N}$ (fakt ten często wykorzystuje się w praktyce, gdyż w wielu zastosowaniach rozkład Poissona jest wygodniejszy do obliczeń niż rozkład dwumianowy, zwłaszcza dla dużych wartości n).

Twierdzenie

Ustalmy $\lambda > 0$ i rozważmy zmienne losowe $X_n \sim B(n, p = \frac{\lambda}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, dla każdego $k \in \{0, 1, \ldots\}$, mamy

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

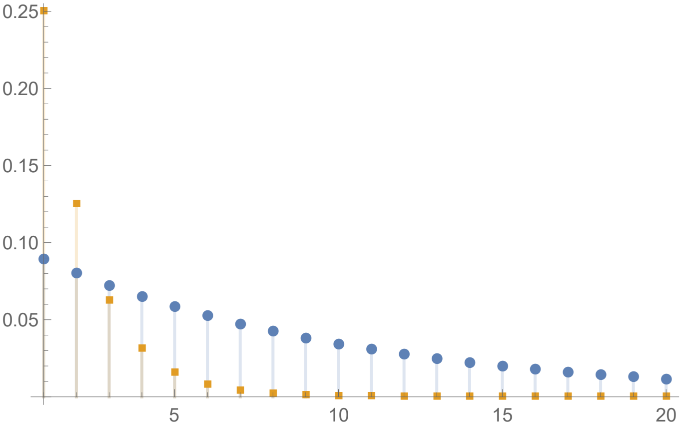
Rozkład **geometryczny**

- Zmienna losowa X ma rozkład geometryczny o parametrze $p \in (0, 1]$, jeśli X przyjmuje wartości naturalne oraz

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad \text{dla każdego} \quad k \in \{1, 2, \ldots\}.$$

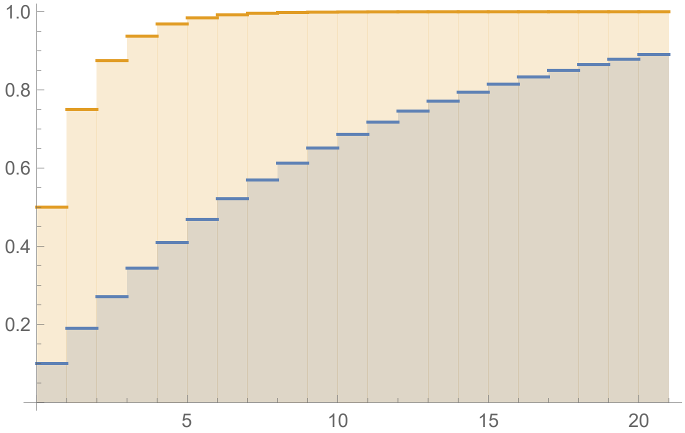
- Oznaczenie: $X \sim Geo(p)$.

Rozkład **geometryczny**



Rysunek: Rozkład geometryczny (dla parametrów: $p = 0,1$ i $p = 0,5$).

Rozkład **geometryczny**



Rysunek: Dystrybuanta rozkładu geometrycznego (dla parametrów: $p = 0,1$ i $p = 0,5$).

Rozkład **geometryczny**

Uwaga

Eksperyment losowy stojący za rozkładem geometrycznym wygląda następująco:

- Załóżmy, że rzucamy stronniczą monetą ($\mathbb{P}(\text{orzeł}) = p$ oraz $\mathbb{P}(\text{reszka}) = 1 - p$), aż do momentu uzyskania orła.

Rozkład **geometryczny**

Uwaga

Eksperyment losowy stojący za rozkładem geometrycznym wygląda następująco:

- Załóżmy, że rzucamy stronniczą monetą ($\mathbb{P}(\text{orzeł}) = p$ oraz $\mathbb{P}(\text{reszka}) = 1 - p$), aż do momentu uzyskania orła.
- Zmienna losowa X, która opisuje łączną liczbę rzutów monetą w tym eksperymencie, ma rozkład geometryczny o parametrze p.

Rozkład **geometryczny**

Uwaga

Eksperyment losowy stojący za rozkładem geometrycznym wygląda następująco:

- Załóżmy, że rzucamy stronniczą monetą ($\mathbb{P}(\text{orzeł}) = p$ oraz $\mathbb{P}(\text{reszka}) = 1 - p$), aż do momentu uzyskania orła.
- Zmienna losowa X, która opisuje łączną liczbę rzutów monetą w tym eksperymencie, ma rozkład geometryczny o parametrze p.

Można myśleć o tym eksperymencie jako o powtarzaniu niezależnych prób Bernoulliego aż do momentu zaobserwowania pierwszego sukcesu.

Przykłady rozkładów prawdopodobieństwa typu ciągłego

Zmienna losowa absolutnie ciągła

Zmienną losową X nazywamy **absolutnie ciągłą**,

Zmienna losowa absolutnie ciągła

Zmienną losową X nazywamy **absolutnie ciągłą**, jeśli

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du \quad \text{dla dowolnego} \quad u \in \mathbb{R}$$

dla pewnej nieujemnej funkcji f_X,

Zmienna losowa absolutnie ciągła

Zmienną losową X nazywamy **absolutnie ciągłą**, jeśli

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \quad \text{dla dowolnego} \quad u \in \mathbb{R}$$

dla pewnej nieujemnej funkcji f_X, zwanej **funkcją gęstości** zmiennej X.

Zmienna losowa absolutnie ciągła

Zmienną losową X nazywamy **absolutnie ciągłą**, jeśli

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \quad \text{dla dowolnego} \quad u \in \mathbb{R}$$

dla pewnej nieujemnej funkcji f_X, zwanej **funkcją gęstości** zmiennej X.

- Rozkład zmiennej losowej X absolutnie ciągłej:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(u)du \quad \text{dla} \quad A \subset \mathbb{R}.$$

Przykłady rozkładów prawdopodobieństwa typu ciągłego

- Rozkład **jednostajny** na odcinku.
- Rozkład **normalny**.
- Rozkład **normalny standardowy**.
- Rozkład **wykładniczy**.

Rozkład **wykładniczy**

- Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o parametrze $\lambda > 0$, jeśli X przyjmuje wartości rzeczywiste nieujemne oraz

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

- Oznaczenie: $X \sim Exp(\lambda)$.

Rozkład **wykładniczy**

- Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o parametrze $\lambda > 0$, jeśli X przyjmuje wartości rzeczywiste nieujemne oraz

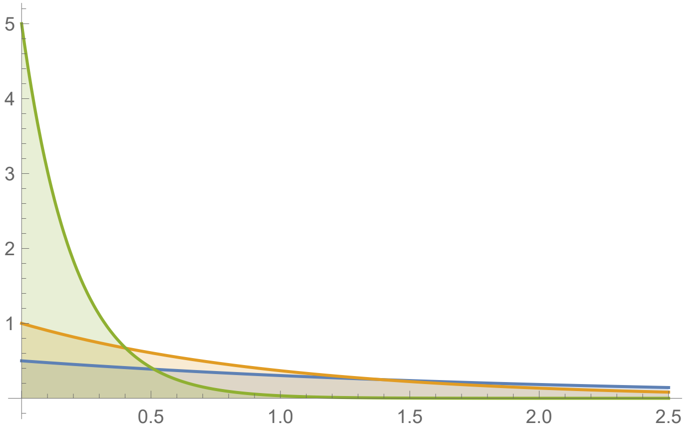
$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

- Oznaczenie: $X \sim Exp(\lambda)$.

- Dystrybuanta:

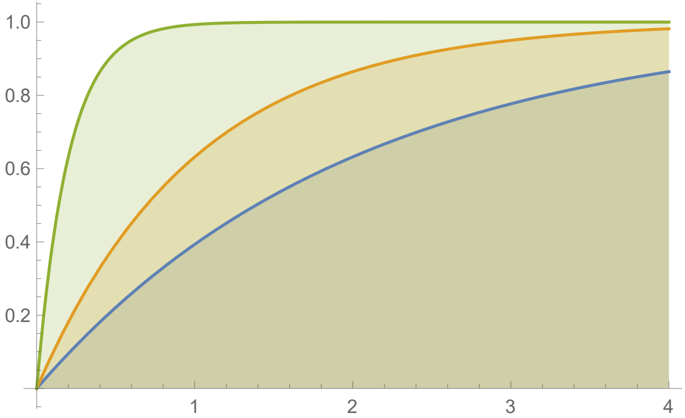
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Rozkład **wykładniczy**



Rysunek: Rozkład wykładniczy (dla parametrów: $\lambda = 0,5$, $\lambda = 1$ i $\lambda = 5$).

Rozkład **wykładniczy**



Rysunek: Dystrybuanta rozkładu wykładniczego (dla parametrów: $\lambda = 0,5$, $\lambda = 1$ i $\lambda = 5$).

Rozkład **wykładniczy** o parametrze $\lambda > 0$

Uwaga

Rozkład wykładniczy można traktować jako ciągły odpowiednik rozkładu geometrycznego.

Przypomnijmy, że eksperyment losowy stojący za rozkładem geometrycznym to rzucanie monetą aż do momentu zaobserwowania orła.

Rozkład **wykładniczy** o parametrze $\lambda > 0$

Uwaga

Rozkład wykładniczy można traktować jako ciągły odpowiednik rozkładu geometrycznego.

Przypomnijmy, że eksperyment losowy stojący za rozkładem geometrycznym to rzucanie monetą aż do momentu zaobserwowania orła.

Załóżmy, że

- rzuty monetą odbywają się co Δ sekundy
  (dla małych Δ: rzuty odbywają się niemal natychmiast jeden po drugim);

Rozkład **wykładniczy** o parametrze $\lambda > 0$

Uwaga

Rozkład wykładniczy można traktować jako ciągły odpowiednik rozkładu geometrycznego.

Przypomnijmy, że eksperyment losowy stojący za rozkładem geometrycznym to rzucanie monetą aż do momentu zaobserwowania orła.

Załóżmy, że

- rzuty monetą odbywają się co Δ sekundy
  (dla małych Δ: rzuty odbywają się niemal natychmiast jeden po drugim);
- prawdopodobieństwo sukcesu (otrzymania orła) w każdej próbie wynosi $p = \Delta\lambda$
  (dla małych Δ: jest bardzo małe).

Rozkład **wykładniczy** o parametrze $\lambda > 0$

Uwaga

Rozkład wykładniczy można traktować jako ciągły odpowiednik rozkładu geometrycznego.

Przypomnijmy, że eksperyment losowy stojący za rozkładem geometrycznym to rzucanie monetą aż do momentu zaobserwowania orła.

Załóżmy, że

- rzuty monetą odbywają się co Δ sekundy
  (dla małych Δ: rzuty odbywają się niemal natychmiast jeden po drugim);
- prawdopodobieństwo sukcesu (otrzymania orła) w każdej próbie wynosi $p = \Delta\lambda$
  (dla małych Δ: jest bardzo małe).

Niech X będzie losowym czasem, po którym zaobserwujemy pierwszy "sukces". Wtedy rozkład zmiennej losowej X zbiega do rozkładu wykładniczego $Exp(\lambda)$, gdy Δ dąży do zera.

Rozkład **wykładniczy** o parametrze $\lambda > 0$

Uwaga

Niech $X \sim Exp(\lambda)$ dla $\lambda > 0$. Wtedy X ma własność *braku pamięci*, tzn.

$$\mathbb{P}(X > x + a | X > a) = \mathbb{P}(X > x) \quad \text{dla} \quad a, x \geqslant 0.$$

Rozkład **wykładniczy** o parametrze $\lambda > 0$

Uwaga

Niech $X \sim Exp(\lambda)$ dla $\lambda > 0$. Wtedy X ma własność *braku pamięci*, tzn.

$$\mathbb{P}(X > x + a | X > a) = \mathbb{P}(X > x) \quad \text{dla} \quad a, x \geqslant 0.$$

Z punktu widzenia oczekiwania na pierwszy sukces, własność *braku pamięci* oznacza, że nie ma znaczenia, jak długo czekaliśmy do tej pory. Jeśli nie zaobserwowaliśmy sukcesu do czasu a, rozkład czasu oczekiwania (od momentu a) na następny sukces jest taki sam, jak gdybyśmy zaczynali od momentu zero.

Centralne twierdzenie graniczne (CTG)

Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne (CTG)

Dany jest ciąg

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne (CTG)

Dany jest ciąg

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie
(zmienne mają jednakowe wartości oczekiwane i wariancje:

$$\mathbb{E}(X_1) = \ldots = \mathbb{E}(X_n) = m, \qquad D^2(X_1) = \ldots = D^2(X_n) = \sigma^2)$$

Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne (CTG)

Dany jest ciąg

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie (zmienne mają jednakowe wartości oczekiwane i wariancje:

$$\mathbb{E}(X_1) = \ldots = \mathbb{E}(X_n) = m, \qquad D^2(X_1) = \ldots = D^2(X_n) = \sigma^2)$$

Wówczas dla odpowiednio dużych n rozkład zmiennej losowej

$$Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

można przybliżać rozkładem normalnym $\mathcal{N}\left(nm, \sigma^2 n\right)$.

Centralne Twierdzenie Graniczne

Uwaga

Przypuśćmy, że interesująca nas zmienna losowa jest sumą dużej liczby niezależnych zmiennych losowych (o skończonej wariancji).

Centralne Twierdzenie Graniczne

Uwaga

Przypuśćmy, że interesująca nas zmienna losowa jest sumą dużej liczby niezależnych zmiennych losowych (o skończonej wariancji).

Dzięki CTG wiemy, że rozkład tej zmiennej można aproksymować rozkładem normalnym, szczególnie gdy liczba składników jest duża.

Centralne Twierdzenie Graniczne

Uwaga

Przypuśćmy, że interesująca nas zmienna losowa jest sumą dużej liczby niezależnych zmiennych losowych (o skończonej wariancji).

Dzięki CTG wiemy, że rozkład tej zmiennej można aproksymować rozkładem normalnym, szczególnie gdy liczba składników jest duża.

Przykłady:

- **Błędy pomiarów laboratoryjnych**: Zazwyczaj są modelowane jako zmienne losowe o rozkładzie normalnym, ponieważ powstają w wyniku sumowania wielu drobnych, niezależnych błędów.

Centralne Twierdzenie Graniczne

Uwaga

Przypuśćmy, że interesująca nas zmienna losowa jest sumą dużej liczby niezależnych zmiennych losowych (o skończonej wariancji).

Dzięki CTG wiemy, że rozkład tej zmiennej można aproksymować rozkładem normalnym, szczególnie gdy liczba składników jest duża.

Przykłady:

- **Błędy pomiarów laboratoryjnych**: Zazwyczaj są modelowane jako zmienne losowe o rozkładzie normalnym, ponieważ powstają w wyniku sumowania wielu drobnych, niezależnych błędów.
- **Próbki populacji**: Gdy losowo pobieramy próbkę z populacji w celu uzyskania wiedzy statystycznej na jej temat, możemy modelować wynikową statystykę (np. średnią próbkową) jako zmienną losową o rozkładzie normalnym.

Centralne Twierdzenie Graniczne

Uwaga

CTG w wielu przypadkach może znacząco uprościć obliczenia.

Przykład:

- Jeśli mamy problem, w którym interesuje nas suma tysiąca niezależnych zmiennych losowych, znalezienie rozkładu tej sumy metodą bezpośrednich obliczeń może okazać się niezwykle trudne.

Centralne Twierdzenie Graniczne

Uwaga

CTG w wielu przypadkach może znacząco uprościć obliczenia.

Przykład:

- Jeśli mamy problem, w którym interesuje nas suma tysiąca niezależnych zmiennych losowych, znalezienie rozkładu tej sumy metodą bezpośrednich obliczeń może okazać się niezwykle trudne.

  Natomiast jeśli znamy średnią i wariancję zmiennych losowych X_i, to (korzystając z CTG) możemy od razu zapisać rozkład.

Centralne Twierdzenie Graniczne

Uwaga

CTG w wielu przypadkach może znacząco uprościć obliczenia.

Przykład:

- Jeśli mamy problem, w którym interesuje nas suma tysiąca niezależnych zmiennych losowych, znalezienie rozkładu tej sumy metodą bezpośrednich obliczeń może okazać się niezwykle trudne.

  Natomiast jeśli znamy średnią i wariancję zmiennych losowych X_i, to (korzystając z CTG) możemy od razu zapisać rozkład.

Uwaga

Powszechnie uznaje się, że jeśli $n \geqslant 30$, to przybliżenie rozkładem normalnym jest bardzo dobre.

Jak stosować CTG?

1. Zapsujemy zmienną losową, która nas interesuje, Y, jako sumę n niezależnych zmiennych losowych:

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{takich, że} \quad m = \mathbb{E}(X_i),\ \sigma^2 = D^2(X_i).$$

2. Wyliczamy $\mathbb{E}(Y)$ i $D^2(Y)$, pamiętając o tym, że $\mathbb{E}(Y) = nm$, $D^2(Y) = n\sigma^2$.

Jak stosować CTG?

1. Zapsujemy zmienną losową, która nas interesuje, Y, jako sumę n niezależnych zmiennych losowych:

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \quad \text{takich, że} \quad m = \mathbb{E}(X_i),\ \sigma^2 = D^2(X_i).$$

2. Wyliczamy $\mathbb{E}(Y)$ i $D^2(Y)$, pamiętając o tym, że $\mathbb{E}(Y) = nm$, $D^2(Y) = n\sigma^2$.
3. Zgodnie z CLT, rozkład zmiennej losowej

$$Z = \frac{Y - \mathbb{E}(Y)}{\sqrt{D^2(Y)}} = \frac{Y - nm}{\sqrt{n}\sigma}$$

możemy przybliżać rozkładem normalnym standardowym.

Jak stosować CTG?

4. Aby znaleźć $\mathbb{P}(y_1 \leqslant Y \leqslant y_2)$, możemy zapisać

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(y_1 \leqslant Y \leqslant y_2\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{y_1 - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant \frac{Y - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant \frac{y_2 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{y_1 - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leqslant Z \leqslant \frac{y_2 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{y_2 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{y_1 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{y_2 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{y_1 - nm}{\sqrt{n}\sigma}\right).
\end{aligned}
$$

Jak stosować Centralne Twierdzenie Graniczne

Przykład

W systemie komunikacyjnym każdy pakiet danych składa się z 1000 bitów. Z powodu szumów, każdy bit może zostać odebrany z błędem z prawdopodobieństwem $0,1$. Zakłada się, że błędy bitów zachodzą niezależnie. **Znajdź prawdopodobieństwo, że w danym pakiecie danych będzie więcej niż 120 błędów**.

Jak stosować Centralne Twierdzenie Graniczne

Przykład

W systemie komunikacyjnym każdy pakiet danych składa się z 1000 bitów. Z powodu szumów, każdy bit może zostać odebrany z błędem z prawdopodobieństwem $0,1$. Zakłada się, że błędy bitów zachodzą niezależnie. **Znajdź prawdopodobieństwo, że w danym pakiecie danych będzie więcej niż** 120 **błędów**.

Dla każdego $i \in \mathbb{N}$ niech X_i będzie następującą zmienną losową:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i\text{-ty bit został odebrany z błędem} \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Jak stosować CTG?

X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rokładzie dwupunktowym z parametrem $p = 0,1$, więc

$$m = \mathbb{E}(X_i) = p = 0,1 \quad \text{i} \quad \sigma^2 = D^2(X_i) = p(1-p) = 0,09.$$

Jak stosować CTG?

X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rokładzie dwupunktowym z parametrem $p = 0,1$, więc

$$m = \mathbb{E}(X_i) = p = 0,1 \quad \text{i} \quad \sigma^2 = D^2(X_i) = p(1-p) = 0,09.$$

Niech

$$Y = X_1 + \ldots + X_{1000}.$$

Jak stosować CTG?

X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rokładzie dwupunktowym z parametrem $p = 0,1$, więc

$$m = \mathbb{E}(X_i) = p = 0,1 \quad \text{i} \quad \sigma^2 = D^2(X_i) = p(1-p) = 0,09.$$

Niech

$$Y = X_1 + \ldots + X_{1000}.$$

Chcemy znaleźć $\mathbb{P}(Y > 120)$.

Jak stosować CTG?

X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rokładzie dwupunktowym z parametrem $p = 0,1$, więc

$$m = \mathbb{E}(X_i) = p = 0,1 \quad \text{i} \quad \sigma^2 = D^2(X_i) = p(1-p) = 0,09.$$

Niech

$$Y = X_1 + \ldots + X_{1000}.$$

Chcemy znaleźć $\mathbb{P}(Y > 120)$. Korzystając z CLT (oraz tablic rozkładu normalnego), mamy

$$\mathbb{P}(Y > 120) = \mathbb{P}\left(\frac{Y - nm}{\sqrt{n\sigma^2}} > \frac{120 - nm}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = \mathbb{P}\left(Z > \frac{120 - 1000 * 0.1}{\sqrt{1000 * 0.09}}\right) =$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(Z \leqslant \frac{20}{\sqrt{90}}\right) \approx 1 - \Phi\left(20/\sqrt{90}\right) = 1 - \Phi(2.11) = 1 - 0.9826 = 0.0174.$$

Elementy statystyki matematycznej

Elementy statystyki matematycznej

- Statystyka opisowa a statystyka matematyczna.
- Teoretyczne podstawy wnioskowania statystycznego.
- **Weryfikacja hipotez statystycznych**.
- Testy różnicy średnich dla obserwacji powiązanych w pary. **Sparowany test** t i **test Wilcoxona dla par obserwacji**.
- Testy zgodności. Testy normalności rozkładu. **Test Shapiro-Wilka**.

Testy statystyczne w *Pythonie*

https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.stats.ttest_1samp.html

SciPy | Installing | User Guide | API reference | Building from source | Development | Release notes | 1.15.0 (stable)

Search Ctrl + K

Section Navigation

- scipy
- scipy.cluster
- scipy.constants
- scipy.datasets
- scipy.differentiate
- scipy.fft
- scipy.fftpack
- scipy.integrate
- scipy.interpolate
- scipy.io
- scipy.linalg
- scipy.ndimage
- scipy.odr
- scipy.optimize
- scipy.signal
- scipy.sparse
- scipy.spatial
- scipy.special
- scipy.stats

SciPy API > Statistical functions (`scipy.stats`) > ttest_1samp

On this page: `ttest_1samp`

`scipy.stats.`

`ttest_1samp`

`ttest_1samp(a, popmean, axis=0, nan_policy='propagate', alternative='two-sided', *, keepdims=False)` [source]

Calculate the T-test for the mean of ONE group of scores.

This is a test for the null hypothesis that the expected value (mean) of a sample of independent observations *a* is equal to the given population mean, *popmean*.

Parameters:

a : ***array_like***

Sample observations.

popmean : ***float or array_like***

Expected value in null hypothesis. If array_like, then its length along *axis* must equal 1, and it must otherwise be broadcastable with *a*.

axis : ***int or None, default: 0***

If an int, the axis of the input along which to compute the statistic. The statistic of each axis-slice (e.g. row) of the input will appear in a corresponding element of the output. If `None`, the input will be raveled before computing the statistic.

nan_policy : ***{'propagate', 'omit', 'raise'}***

Defines how to handle input NaNs.

Elementy algebry liniowej

Elementy algebry liniowej

- Liczby zespolone.
- **Wektory**. **Iloczyn skalarny wektorów**. Notacja Diraca.
- **Baza** i wymiar przestrzeni wektorowej. Norma euklidesowa. Wektory **unormowane** i **ortogonalne**.
- **Macierze** i działania wykonywane na macierzach.

Wektor n-wymiarowy i notacja Diraca

Wektor n-wymiarowy

n-**wymiarowym wektorem** $\mathbf{v}$ nazywamy **uporządkowaną tablicę** n **liczb**: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{(postać \underline{kolumnowa})} \qquad \langle u| = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{(postać \underline{wierszowa})}$$

Macierz

Definicja

Macierzą nazywamy **prostokątną tablicę liczb** (rzeczywistych bądź zespolonych), symboli lub wyrażeń.

Macierz

Definicja

Macierzą nazywamy **prostokątną tablicę liczb** (rzeczywistych bądź zespolonych), symboli lub wyrażeń.

Przykład

Przykład macierzy o wymiarach $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Iloczyn macierzy

Iloczyn macierzy

Dane są macierze $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mk}$ oraz $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{kn}$, takie że

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}.$$

Wynikiem **pomnożenia macierzy $\mathbf{A}$ przez macierz $\mathbf{B}$** jest macierz $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{mn}$ postaci

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix},$$

gdzie $c_{2n} = a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \ldots + a_{2k}b_{kn}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

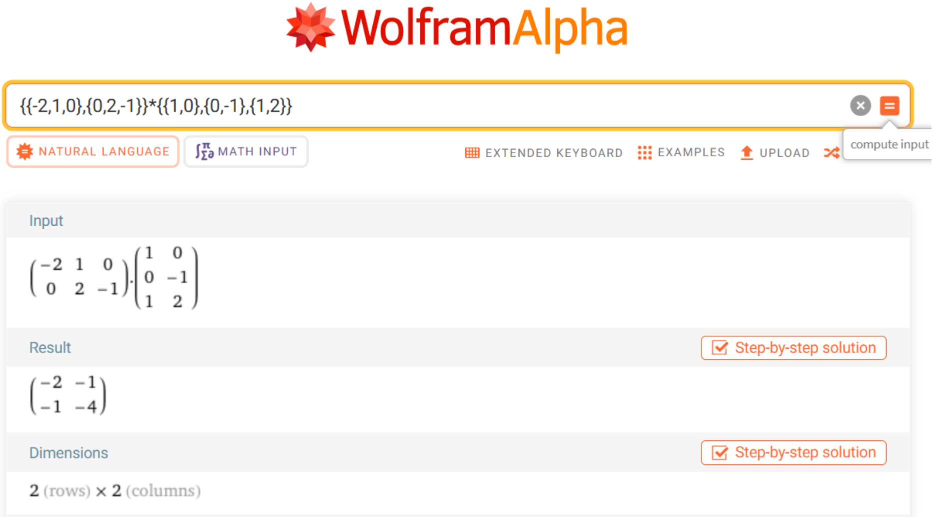
Iloczyn macierzy

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \\ \vdots \\ \langle a_m| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |b_1\rangle & |b_2\rangle & \ldots & |b_n\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a_1|b_1\rangle & \langle a_1|b_2\rangle & \cdots & \langle a_1|b_n\rangle \\ \langle a_2|b_1\rangle & \langle a_2|b_2\rangle & \cdots & \langle a_2|b_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_m|b_1\rangle & \langle a_m|b_2\rangle & \cdots & \langle a_m|b_n\rangle \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy – zapis ułatwiający odczytanie wymiaru macierzy wynikowej

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2+0+0 & 0-1+0 \\ 0+0-1 & 0-2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Iloczyn macierzy – w *WolframAlpha*



Iloczyn zewnętrzny wektorów

Definicja

Wynikiem **iloczynu zewnętrznego** wektora kolumnowego $|u\rangle$ i wektora wierszowego $\langle v|$ jest macierz

$$|u\rangle\langle v| = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}.$$

Iloczyn zewnętrzny wektorów

Definicja

Wynikiem **iloczynu zewnętrznego** wektora kolumnowego $|u\rangle$ i wektora wierszowego $\langle v|$ jest macierz

$$|u\rangle\langle v| = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_m \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_m \end{bmatrix}.$$

Iloczyn zewnętrzny wektorów

Iloczyn zewnętrzny wektorów (widziany jako iloczyn macierzy)

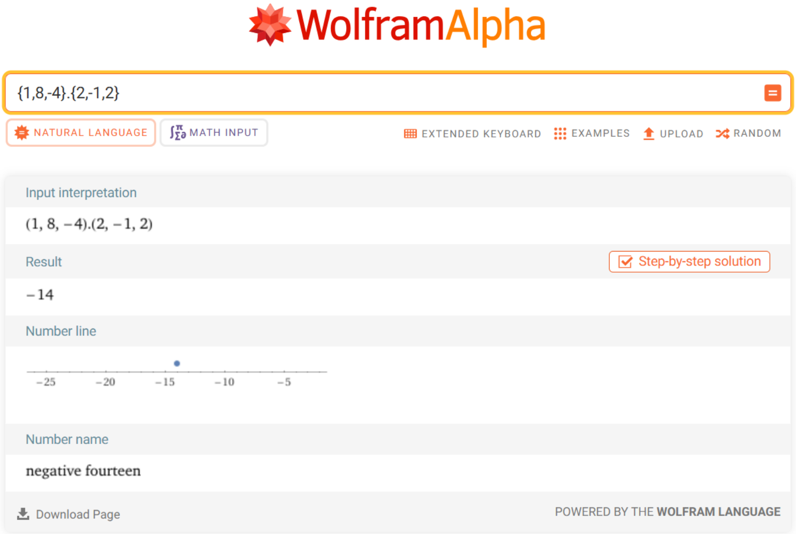
$$\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 8 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 8 & 2\cdot(-4)\\ (-1)\cdot 1 & (-1)\cdot 8 & (-1)(-4)\\ 2\cdot 1 & 2\cdot 8 & 2\cdot(-4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 16 & -8\\ -1 & -8 & 4\\ 2 & 16 & -8\end{bmatrix}$$

Iloczyn skalarny wektorów

Iloczyn skalarny wektorów (widziany jako iloczyn macierzy)

$$\begin{bmatrix}1 & 8 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-8-8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-14\end{bmatrix} = -14$$

Iloczyn skalarny wektorów – w *WolframAlpha*



Iloczyn skalarny w n-wymiarowej przestrzeni współrzędnych zespolonych

Definicja

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^n$ iloczyn skalarny definiujemy następującym wzorem:

$$\langle u|v\rangle = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \ldots + \overline{x_n}y_n \quad \text{dla dowolnych} \quad |u\rangle, |v\rangle \in \mathbb{C}^n.$$

Iloczyn skalarny w n-wymiarowej przestrzeni współrzędnych zespolonych

$$\langle u| = [2+i, -i], \quad |v\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$$

$$\langle u|v\rangle = (2-i)\cdot 1 + i(1+i) =$$

$$= 2 - \cancel{i} + \cancel{i} + i^2 =$$

$$= 2 - 1 = \underline{1}$$

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik macierzy

To **pewna liczba (lub ogólniej wartość) przypisywana macierzy kwadratowej** $\mathbf{A}$ i oznaczana symbolem $\det(\mathbf{A})$ lub $|\mathbf{A}|$.

Wartość ta jest otrzymywana przez odpowiednie przemnożenie i dodawanie wartości macierzy.

Wyznacznik macierzy

Wyznaczniki macierzy wymiarów 1×1 i 2×2

- $$\text{Dla } \mathbf{A} = [a_{11}]: \quad \det(A) = a_{11}.$$

Wyznacznik macierzy

Wyznaczniki macierzy wymiarów 1×1 i 2×2

- $$\text{Dla } \mathbf{A} = [a_{11}] : \quad \det(A) = a_{11}.$$
- $$\text{Dla } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} : \quad \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Wyznacznik macierzy

$$
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}
=
$$

$$
= 2\cdot 0\cdot(-1) + (-1)\cdot 3\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 - 2\cdot 0\cdot 0 - 2\cdot 3\cdot 1 - (-1)\cdot 1\cdot(-1) =
$$

$$
= 2 - 6 - 1 = -5
$$

Wyznacznik macierzy – w *Mathematice*

```
In[26]:= MatrixForm[{{2, 1, 0}, {-1, 0, 1}, {2, 3, -1}}]
         postać macierzy

Out[26]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

```
In[27]:= Det[{{2, 1, 0}, {-1, 0, 1}, {2, 3, -1}}]
         wyznacznik

Out[27]= -5
```