Iloczyn skalarny wektorów

Niech

- $\mathbb{K}$ będzie przestrzenią skalarów ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);

Niech

- $\mathbb{K}$ będzie przestrzenią skalarów ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- V będzie przestrzenią liniową

  (np. składającą się z n-wymiarowych wektorów rzeczywistych, $V = \mathbb{R}^n$,
  lub n-wymiarowych wektorów zespolonych, $V = \mathbb{C}^n$).

Iloczyn skalarny – definicja

Definicja

Funkcję $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, która **dowolnym dwóm wektorom przypisuje wartość liczbową**,

Iloczyn skalarny – definicja

Definicja

Funkcję $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, która **dowolnym dwóm wektorom przypisuje wartość liczbową**,i która spełnia następujące własności (dla $|u\rangle, |v\rangle, |z\rangle \in V$ oraz $\alpha \in \mathbb{K}$):

Iloczyn skalarny – definicja

Definicja

Funkcję $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, która **dowolnym dwóm wektorom przypisuje wartość liczbową**,i która spełnia następujące własności (dla $|u\rangle, |v\rangle, |z\rangle \in V$ oraz $\alpha \in \mathbb{K}$):

- warunek sprzężonej symetrii: $\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$,

Iloczyn skalarny – definicja

Definicja

Funkcję $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, która **dowolnym dwóm wektorom przypisuje wartość liczbową**,i która spełnia następujące własności (dla $|u\rangle, |v\rangle, |z\rangle \in V$ oraz $\alpha \in \mathbb{K}$):

- warunek sprzężonej symetrii: $\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$,
- warunek liniowości ze względu na pierwszą współrzędną:

$$\Big(\alpha \langle u|\Big) |v\rangle = \alpha \langle u|v\rangle, \qquad \Big(\langle u| + \langle v|\Big) |z\rangle = \langle u|z\rangle + \langle v|z\rangle,$$

Iloczyn skalarny – definicja

Definicja

Funkcję $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, która **dowolnym dwóm wektorom przypisuje wartość liczbową**,i która spełnia następujące własności (dla $|u\rangle, |v\rangle, |z\rangle \in V$ oraz $\alpha \in \mathbb{K}$):

- warunek sprzężonej symetrii: $\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$,
- warunek liniowości ze względu na pierwszą współrzędną:

$$\Big(\alpha \langle u|\Big) |v\rangle = \alpha \langle u|v\rangle, \qquad \Big(\langle u| + \langle v|\Big) |z\rangle = \langle u|z\rangle + \langle v|z\rangle,$$

- warunek dodatniej określoności: $\langle u|u\rangle \geqslant 0$,

Iloczyn skalarny – definicja

Definicja

Funkcję $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, która **dowolnym dwóm wektorom przypisuje wartość liczbową**,i która spełnia następujące własności (dla $|u\rangle, |v\rangle, |z\rangle \in V$ oraz $\alpha \in \mathbb{K}$):

- warunek sprzężonej symetrii: $\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$,
- warunek liniowości ze względu na pierwszą współrzędną:

$$\Big(\alpha \langle u|\Big) |v\rangle = \alpha \langle u|v\rangle, \qquad \Big(\langle u| + \langle v|\Big) |z\rangle = \langle u|z\rangle + \langle v|z\rangle,$$

- warunek dodatniej określoności: $\langle u|u\rangle \geqslant 0$,
- warunek niezdegenerowania: jeśli $\langle u|u\rangle = 0$, to $|u\rangle = 0$,

Iloczyn skalarny – definicja

Definicja

Funkcję $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, która **dowolnym dwóm wektorom przypisuje wartość liczbową**,i która spełnia następujące własności (dla $|u\rangle, |v\rangle, |z\rangle \in V$ oraz $\alpha \in \mathbb{K}$):

- warunek sprzężonej symetrii: $\langle u|v\rangle = \overline{\langle v|u\rangle}$,
- warunek liniowości ze względu na pierwszą współrzędną:

$$\Big(\alpha \langle u|\Big) |v\rangle = \alpha \langle u|v\rangle , \qquad \Big(\langle u| + \langle v|\Big) |z\rangle = \langle u|z\rangle + \langle v|z\rangle ,$$

- warunek dodatniej określoności: $\langle u|u\rangle \geqslant 0$,
- warunek niezdegenerowania: jeśli $\langle u|u\rangle = 0$, to $|u\rangle = 0$,

nazywamy **iloczynem skalarnym wektorów**.

Iloczyn skalarny – własności

Uwage

- Skalarnie można mnożyć tylko wektory o tej samej liczbie elementów.

Iloczyn skalarny – własności

Uwaga

- Skalarnie można mnożyć tylko wektory o tej samej liczbie elementów.
- Wynikiem iloczynu skalarnego jest liczba.

Iloczyn skalarny w n-wymiarowej przestrzeni współrzędnych zespolonych

Definicja

W przestrzeni wektorowej $\mathbb{C}^n$ iloczyn skalarny definiujemy następującym wzorem:

$$\langle u|v\rangle = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \ldots + \overline{x_n}y_n \quad \text{dla dowolnych} \quad |u\rangle, |v\rangle \in \mathbb{C}^n.$$

Oczywiście spełnia on wszystkie aksjomaty z definicji ogólnej.

Kombinacja liniowa wektorów i liniowa zależność wektorów

Kombinacja liniowa wektorów

Definicja

- **Kombinacją liniową dwóch wektorów** $|u\rangle, |v\rangle \in V$ o współczynnikach $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ nazywamy wyrażenie

$$|w\rangle = \alpha |u\rangle + \beta |v\rangle.$$

Kombinacja liniowa wektorów

Definicja

- **Kombinacją liniową dwóch wektorów** $|u\rangle, |v\rangle \in V$ o współczynnikach $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ nazywamy wyrażenie

$$|w\rangle = \alpha |u\rangle + \beta |v\rangle.$$

- **Kombinacją liniową** k **wektorów** $|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_k\rangle \in V$ o współczynnikach $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ nazywamy wyrażenie

$$|z\rangle = \alpha_1 |u_1\rangle + \alpha_2 |u_2\rangle + \ldots + \alpha_k |u_k\rangle.$$

Liniowa zależność wektorów

Definicja

O zbiorze wektorów $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_n\rangle\}$ powiemy, że jest on **liniowo zależny**, jeżeli istnieje jeden taki wektor $|u_i\rangle$ oraz niezerowe współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, takie że

$$\alpha_i |u_i\rangle = \alpha_1 |u_1\rangle + \alpha_2 |u_2\rangle + \ldots + \alpha_{i-1} |u_{i-1}\rangle + \alpha_{i+1} |u_{i+1}\rangle + \ldots + \alpha_n |u_n\rangle .$$

Liniowa zależność wektorów

Definicja

O zbiorze wektorów $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_n\rangle\}$ powiemy, że jest on **liniowo zależny**, jeżeli istnieje jeden taki wektor $|u_i\rangle$ oraz niezerowe współczynniki $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, takie że

$$\alpha_i |u_i\rangle = \alpha_1 |u_1\rangle + \alpha_2 |u_2\rangle + \ldots + \alpha_{i-1} |u_{i-1}\rangle + \alpha_{i+1} |u_{i+1}\rangle + \ldots + \alpha_n |u_n\rangle .$$

Oznacza to, że jeden z wektorów można zapisać jako kombinację liniową pozostałych wektorów z niezrowymi współczynnikami.

Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Definicja

Jeżeli zbiór n wektorów $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_n\rangle\}$ należących do danej przestrzeni wektorowej V **nie jest liniowo zależny** i **dodanie dowolnego wektora niezerowego** $|v\rangle \in V$ **do tego zbioru spowoduje, że stanie się on liniowo zależny**, to taki zbiór nazywamy **bazą przestrzeni wektorowej**.

Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Definicja

Jeżeli zbiór n wektorów $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_n\rangle\}$ należących do danej przestrzeni wektorowej V **nie jest liniowo zależny** i **dodanie dowolnego wektora niezerowego** $|v\rangle \in V$ **do tego zbioru spowoduje, że stanie się on liniowo zależny**, to taki zbiór nazywamy **bazą przestrzeni wektorowej**.

Definicja

Jeśli baza danej przestrzeni wektorowej V jest n-elementowa, to mówimy, że przestrzeń wektorowa V ma **wymiar** n.

Baza i wymiar przestrzeni wektorowej

Uwaga

- Każda przestrzeń wektorowa ma bazę.
- Dowolny wektor z przestrzeni wektorowej możemy zapisać jako kombinację liniową wektorów bazowych tej przestrzeni.

Baza ortonormalna

Definicja

Bazę $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots |e_n\rangle\}$ przestrzeni wektorowej V nazywamy **ortonormalną**, gdy

$$\langle e_i|e_j\rangle = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j,\ i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

oraz

$$\langle e_i|e_i\rangle = 1 \quad \text{dla} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Baza ortonormalna

Definicja

Bazę $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots |e_n\rangle\}$ przestrzeni wektorowej V nazywamy **ortonormalną**, gdy

$$\langle e_i|e_j\rangle = 0 \quad \text{dla} \quad i \neq j,\ i \in \{1,2,\ldots,n\},\ j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

oraz

$$\langle e_i|e_i\rangle = 1 \quad \text{dla} \quad i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

Wówczas dowolny wektor $|u\rangle \in V$ możemy zapisać w następujący sposób:

$$|u\rangle = \langle e_1|u\rangle |e_1\rangle + \langle e_2|u\rangle |e_2\rangle + \ldots + \langle e_n|u\rangle |e_n\rangle .$$

Baza obliczeniowa

Przykład

Ważnym przykładem bazy w przestrzeni n-wymiarowych wektorów kolumnowych jest **baza obliczeniowa**, składająca się z następujących wektorów:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad , \ldots, \quad |n-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Baza obliczeniowa

Przykład

Ważnym przykładem bazy w przestrzeni n-wymiarowych wektorów kolumnowych jest **baza obliczeniowa**, składająca się z następujących wektorów:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad , \ldots , \quad |n-1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Nie należy mylić wektora zerowego 0 z wektorem $|0\rangle$; ten pierwszy składa się z samych zer, a drugi ma na pierwszej pozycji 1.