Wektory

Co to jest wektor

Wektor n-wymiarowy

n-wymiarowym wektorem $\mathbf{v}$ nazywamy **uporządkowaną tablicę** n **liczb** (najczęściej rzeczywistych bądź zespolonych): $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Co to jest wektor

Wektor n-wymiarowy

n-**wymiarowym wektorem** $\mathbf{v}$ nazywamy **uporządkowaną tablicę** n **liczb** (najczęściej rzeczywistych bądź zespolonych): $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{(postać \underline{kolumnowa})} \qquad \langle u| = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{(postać \underline{wierszowa})}$$

Co to jest wektor

Wektor n-wymiarowy

n-wymiarowym wektorem $\mathbf{v}$ nazywamy **uporządkowaną tablicę n liczb** (najczęściej rzeczywistych bądź zespolonych): $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{(postać \underline{kolumnowa})} \qquad \langle u| = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{(postać \underline{wierszowa})}$$

n-wymiarowe wektory **identyfikują punkty w przestrzeni n-wymiarowej**, w której są zdefiniowane.

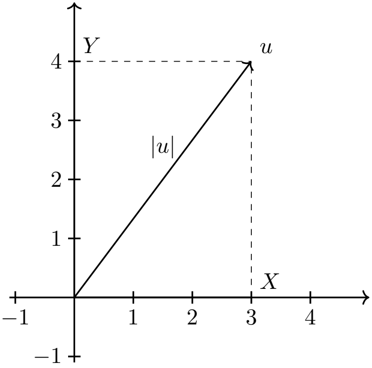
Notacja Diraca – stosowana w informatyce i fizyce kwantowej

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{(czytamy “\textbf{ket} } u\text{”)} \qquad \langle u| = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \quad \text{(czytamy “\textbf{bra} } u\text{”)}$$

Szczególny przypadek: wektor dwuwymiarowy

Dwuwymiarowy wektor $|u\rangle$ możemy jednoznacznie określić przez:

- jego **moduł** $|\mathbf{u}|$ (długość)
- oraz **kąt, jaki tworzy on z osią** X (kierunek wzraz ze zwrotem),



Przestrzeń wektorowa

Definicja

Niech dany będzie **zbiór skalarów** $\mathbb{K}$ (najczęściej $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) .

Przestrzeń wektorowa

Definicja

Niech dany będzie **zbiór skalarów** $\mathbb{K}$ (najczęściej $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) .

Wówczas **zbiór V wektorów** (rzeczywistych bądź zespolonych), które możemy:

- **dodawać** do siebie
- i **mnożyć przez skalary**

Przestrzeń wektorowa

Definicja

Niech dany będzie **zbiór skalarów** $\mathbb{K}$ (najcześciej $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) .

Wówczas **zbiór V wektorów** (rzeczywistych bądź zespolonych), które możemy:

- **dodawać** do siebie
- i **mnożyć przez skalary**

(zgodnie z określonymi regułami, wymienionymi na kolejnym slajdzie),

Przestrzeń wektorowa

Definicja

Niech dany będzie **zbiór skalarów** $\mathbb{K}$ (najczęściej $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) .

Wówczas **zbiór** V **wektorów** (rzeczywistych bądź zespolonych), które możemy:

- **dodawać** do siebie
- i **mnożyć przez skalary**

(zgodnie z określonymi regułami, wymienionymi na kolejnym slajdzie),

nazywamy **przestrzenią wektorową** (lub przestrzenią liniową).

Aksjomaty przestrzeni wektorowej

Aby zbiór V wektorów z działaniami dodawania i mnożenia przez skalar był przestrzenią wektorową, to **dla dowolnych** $|u\rangle, |v\rangle \in V$ **i dowolnych skalarów** $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ **muszą być spełnione następujące własności**:

- **przemienność dodawania**: $|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle$;
- **łączność dodawania**: $(|u\rangle + |v\rangle) + |z\rangle = |u\rangle + (|v\rangle + |z\rangle)$;

Aksjomaty przestrzeni wektorowej

Aby zbiór V wektorów z działaniami dodawania i mnożenia przez skalar był przestrzenią wektorową, to **dla dowolnych** $|u\rangle, |v\rangle \in V$ **i dowolnych skalarów** $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ **muszą być spełnione następujące własności**:

- **przemienność dodawania**: $|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle$;
- **łączność dodawania**: $(|u\rangle + |v\rangle) + |z\rangle = |u\rangle + (|v\rangle + |z\rangle)$;
- **istnienie wektora zerowego**:

  istnieje $0 \in V$ taki, że $0 + |u\rangle = |u\rangle + 0 = |u\rangle$;
- **istnienie wektora przeciwnego** istnieje $-|u\rangle \in V$ taki, że $|u\rangle + (-|u\rangle) = 0$;

Aksjomaty przestrzeni wektorowej

Aby zbiór V wektorów z działaniami dodawania i mnożenia przez skalar był przestrzenią wektorową, to **dla dowolnych** $|u\rangle, |v\rangle \in V$ **i dowolnych skalarów** $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ **muszą być spełnione następujące własności**:

- **przemienność dodawania**: $|u\rangle + |v\rangle = |v\rangle + |u\rangle$;
- **łączność dodawania**: $(|u\rangle + |v\rangle) + |z\rangle = |u\rangle + (|v\rangle + |z\rangle)$;
- **istnienie wektora zerowego**:

  istnieje $0 \in V$ taki, że $0 + |u\rangle = |u\rangle + 0 = |u\rangle$;
- **istnienie wektora przeciwnego** istnieje $-|u\rangle \in V$ taki, że $|u\rangle + (-|u\rangle) = 0$;
- **łączność mnożenia przez skalar** $\alpha(\beta |u\rangle) = (\alpha\beta) |u\rangle$;

Aksjomaty przestrzeni wektorowej

- **rozdzielność dodawania skalarów względem mnożenia przez wektor**:

$$(\alpha + \beta) |u\rangle = \alpha |u\rangle + \beta |u\rangle ;$$

- **rozdzielność dodawania wektorów względem mnożenia przez skalar**:

$$\alpha (|u\rangle + |v\rangle) = \alpha |u\rangle + \alpha |v\rangle ;$$

Aksjomaty przestrzeni wektorowej

- **rozdzielność dodawania skalarów względem mnożenia przez wektor**:

$$(\alpha + \beta)\left|u\right\rangle = \alpha\left|u\right\rangle + \beta\left|u\right\rangle;$$

- **rozdzielność dodawania wektorów względem mnożenia przez skalar**:

$$\alpha\left(\left|u\right\rangle + \left|v\right\rangle\right) = \alpha\left|u\right\rangle + \alpha\left|v\right\rangle;$$

- **istnienie elementu wyróżnionego 1 dla działania mnożenia**:

$$1\left|u\right\rangle = \left|u\right\rangle.$$

Wektory kolumnowe

Działania wykonywane na wektorach kolumnowych

Mnożenie n-wymiarowego wektora $|u\rangle$ przez skalar α

$$\alpha\,|u\rangle = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

Działania wykonywane na wektorach kolumnowych

Mnożenie n-wymiarowego wektora $|u\rangle$ przez skalar α

$$\alpha\,|u\rangle = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$$

Dodawanie dwóch n-wymiarowych wektorów $|u\rangle$ i $|v\rangle$

$$|u\rangle + |v\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Operacja transpozycji wektorów

Operacja transpozycji wektorów

Zamienia wektory kolumnowe na wierszowe, tzn. dla dowolnego wektora $|u\rangle$, wektor transponowany $|u\rangle^T$ jest postaci

$$|u\rangle^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \langle u| \,.$$

Wektory wierszowe

Działania wykonywane na wektorach wierszowych

Mnożenie n-wymiarowego wektora $\langle u|$ przez skalar α

$$\alpha \langle u| = \alpha \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 & \alpha x_2 & \dots & \alpha x_n \end{bmatrix}$$

Dodawanie dwóch n-wymiarowych wektorów $\langle u|$ i $\langle v|$

$$\langle u| + \langle v| = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 & x_2 + y_2 & \dots & x_n + y_n \end{bmatrix}$$

Transponowanie n-wymiarowego wektora $\langle u|$

$$\langle u|^T = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = |u\rangle \,.$$

Sprzężenie hermitowskie

Sprzężenie hermitowskie

Dla n-wymiarowych wektorów (zarówno kolumnowych $|u\rangle$, jak i wierszowych $\langle u|$) możemy dodatkowo wprowadzić **operację** **sprzężenia hermitowskiego**, tzn.

$$|u\rangle^\dagger = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_n} \end{bmatrix} = \langle \overline{u}|$$

oraz

$$\langle u|^\dagger = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_2} \\ \vdots \\ \overline{x_n} \end{bmatrix} = |\overline{u}\rangle \,.$$

Sprzężenie hermitowskie

Uwaga

Zauważmy, że **tylko dla wektorów zespolonych wykonanie na nich operacji transponowania i sprzężenia hermitowskiego daje istotnie różne wyniki**.

Sprzężenie hermitowskie

Uwaga

Zauważmy, że **tylko dla wektorów zespolonych wykonanie na nich operacji transponowania i sprzężenia hermitowskiego daje istotnie różne wyniki**.

W przypadku wektorów <u>rzeczywistych</u> mamy

$$|u\rangle^\dagger = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^\dagger = \begin{bmatrix} \overline{x_1} & \overline{x_2} & \cdots & \overline{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}^T = |u\rangle^T .$$