Zmienna losowa dyskretna

Zmienna losowa dyskretna

Zmienna losowa jest dyskretna, jeśli przyjmuje tylko skończoną lub przeliczalną liczbę wartości.

Zmienna losowa dyskretna

Zmienna losowa jest dyskretna, jeśli przyjmuje tylko skończoną lub przeliczalną liczbę wartości.

- Rozkład określamy wskazując pary (x_i, p_i) odpowiednio: wartości tej zmiennej i prawdopodobieństw, z jakimi są one przyjmowane ($p_i := \mathrm{P}(X = x_i)$). Zbiór tych par

$$\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots\}$$ (w przypadku przeliczalnej liczby wartości)

nazywamy bazą.

Zmienna losowa dyskretna

Zmienna losowa jest dyskretna, jeśli przyjmuje tylko skończoną lub przeliczalną liczbę wartości.

- Rozkład określamy wskazując pary (x_i, p_i) odpowiednio: wartości tej zmiennej i prawdopodobieństw, z jakimi są one przyjmowane ($p_i := P(X = x_i)$). Zbiór tych par

$$\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots\} \text{ (w przypadku przeliczalnej liczby wartości)}$$

nazywamy bazą.

x_1	x_2	x_3	$\ldots$
p_1	p_2	p_3	$\ldots$

Zmienna losowa dyskretna

> Zmienna losowa jest dyskretna, jeśli przyjmuje tylko skończoną lub przeliczalną liczbę wartości.

- Rozkład określamy wskazując pary (x_i, p_i) odpowiednio: wartości tej zmiennej i prawdopodobieństw, z jakimi są one przyjmowane ($p_i := P(X = x_i)$). Zbiór tych par

$$\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots\} \quad \text{(w przypadku przeliczalnej liczby wartości)}$$

nazywamy bazą.

x_1	x_2	x_3	$\ldots$
p_1	p_2	p_3	$\ldots$

- Wartość oczekiwana: $E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots$
- Wariancja: $D^2(X) = E\left[X^2\right] - (E(X))^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \ldots - (E(X))^2$
- Odchylenie standardowe: $\sqrt{D^2(X)}$

Zmienna losowa dyskretna

Twierdzenie

Jeśli dane są:

- zbiór liczb rzeczywistych $\{x_1, x_2, \ldots\}$
- i zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych $\{p_1, p_2, \ldots\}$ takich, że $p_1 + p_2 + \ldots = 1$,

Zmienna losowa dyskretna

Twierdzenie

Jeśli dane są:

- zbiór liczb rzeczywistych $\{x_1, x_2, \ldots\}$
- i zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych $\{p_1, p_2, \ldots\}$ takich, że $p_1 + p_2 + \ldots = 1$,

to istnieje przestrzeń probabilistyczna (Ω, F, P)
oraz zmienna losowa dyskretna X na tej przestrzeni

Zmienna losowa dyskretna

Twierdzenie

Jeśli dane są:

- zbiór liczb rzeczywistych $\{x_1, x_2, \ldots\}$
- i zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych $\{p_1, p_2, \ldots\}$ takich, że $p_1 + p_2 + \ldots = 1$,

to istnieje przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$
oraz zmienna losowa dyskretna X na tej przestrzeni o rozkładzie zadanym następująco:

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} p_i & \text{jeśli } x = x_i \text{ dla } i \in \{1, 2, \ldots\}, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie (tzn. gdy } x \notin \{x_1, x_2, \ldots\}). \end{cases}$$

Zmienna losowa dyskretna

Twierdzenie

Jeśli dane są:

- zbiór liczb rzeczywistych $\{x_1, x_2, \dots\}$
- i zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych $\{p_1, p_2, \dots\}$ takich, że $p_1 + p_2 + \dots = 1$,

to istnieje przestrzeń probabilistyczna (Ω, F, P)
oraz zmienna losowa dyskretna X na tej przestrzenio rozkładzie zadanym następująco:

$$\mathrm{P}(X = x) = \begin{cases} p_i & \text{jeśli } x = x_i \text{ dla } i \in \{1, 2, \dots\}, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie (tzn. gdy } x \notin \{x_1, x_2, \dots\}). \end{cases}$$

Uwaga

Z uwagi na powyższe twierdzenie zmienną losową X możemy (w szczególnych przypadkach) definiować jako funkcję przyjmującą wartości x_i z prawdopodobieństwami p_i dla $i \in \{1, 2, \dots\}$.

Przykłady dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa

Przykłady dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa

Istnieją klasy dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa,
z których korzystamy szczególnie często.

Każdy z tych rozkładów jest związany z określonym eksperymentem losowym.

Przykłady dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa

Istnieją klasy dyskretnych rozkładów prawdopodobieństwa,
z których korzystamy szczególnie często.

Każdy z tych rozkładów jest związany z określonym eksperymentem losowym.

Oznaczenia

- n – dowolna wartość naturalna
- p – pewien parametr z przedziału $(0, 1)$, $q = 1 - p$

Rozkład **dwupunktowy** (ang. *Bernoulli distribution*)

Rozkład **dwupunktowy**

- Zmienna losowa X ma rozkład dwupunktowy z parametrem p, jeśli X przyjmuje jedynie wartości $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$, oraz

$$\mathrm{P}(X = 0) = q = 1 - p, \quad \mathrm{P}(X = 1) = p,$$

gdzie $p, q \quad 0$ oraz $p + q = 1$.

- Oznaczenie: $X \quad \mathit{Bernoulli}(p)$

Rozkład **dwupunktowy**

- Zmienna losowa X ma rozkład dwupunktowy z parametrem p, jeśli X przyjmuje jedynie wartości $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$, oraz

$$P(X = 0) = q = 1 - p, \quad P(X = 1) = p,$$

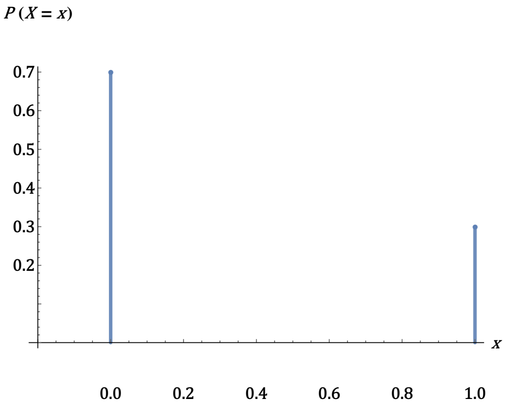
  gdzie $p, q \quad 0$ oraz $p + q = 1$.

- Oznaczenie: $X \quad Bernoulli(p)$

-

x_i	0	1
$p_i = P(X = x_i)$	q	p

Rozkład **dwupunktowy** (ang. *Bernoulli distribution*)



Rozkład dwupunktowy z parametrem $p = 0,3$.

$X \quad Bernoulli(0,3)$, tzn. $\mathrm{P}(X = 0) = 0,7$, i $\mathrm{P}(X = 1) = p = 0,3$

Rozkład **dwupunktowy**

Zmienna losowa X o rozkładzie dwupunktowym

- Modeluje eksperymenty losowe, które mają dwa możliwe wyniki (sukces i porażkę).

Przykład: Podchodzisz do egzaminu. Albo go zdajesz ($X = 1$), albo nie zdajesz ($X = 0$).

Źródło: `https://unsplash.com/` (Scott Graham)

Rozkład **dwupunktowy**

Ogólniej: Zmienna X jest powiązana z jakimś zdarzeniem A.

Źródło: `https://unsplash.com/` (Scott Graham)

Rozkład **dwupunktowy**

Ogólniej: Zmienna X jest powiązana z jakimś zdarzeniem A.

- Jeżeli zajdzie A (wyrzucisz orła/ zdasz test), to $X = 1$.
- W przeciwnym razie $X = 0$.

Źródło: `https://unsplash.com/` (Scott Graham)

Rozkład **dwupunktowy**

Ogólniej: Zmienna X jest powiązana z jakimś zdarzeniem A.

- Jeżeli zajdzie A (wyrzucisz orła/ zdasz test), to $X = 1$.
- W przeciwnym razie $X = 0$.

Uwaga:

- W przypadku monety symetrycznej $p = \frac{1}{2}$ (tzn. $P(X = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$).

Źródło: `https://unsplash.com/` (Scott Graham)

Rozkład **dwupunktowy**

Ogólniej: Zmienna X jest powiązana z jakimś zdarzeniem A.

- Jeżeli zajdzie A (wyrzucisz orła/ zdasz test), to $X = 1$.
- W przeciwnym razie $X = 0$.

Uwaga:

- W przypadku monety symetrycznej $p = \frac{1}{2}$ (tzn. $P(X = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$).
- W przypadku doświadczenia z testem o rozkładzie zadecydują m.in. dotychczasowa wiedza zdającego oraz ilość czasu poświęcona przez niego na przygotowanie się do testu.

Źródło: `https://unsplash.com/` (Scott Graham)

Rozkład **dwumianowy** (ang. *Binomial distribution*)

Rozkład dwumianowy

- Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy z parametrami n i p, jeśli X przyjmuje wartości całkowite od 0 do n, oraz
$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{dla dowolnego} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$
- Oznaczenie: $X \sim B(n, p)$

Rozkład **dwumianowy**

- Zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy z parametrami n i p, jeśli X przyjmuje wartości całkowite od 0 do n, oraz

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad \text{dla dowolnego } k \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

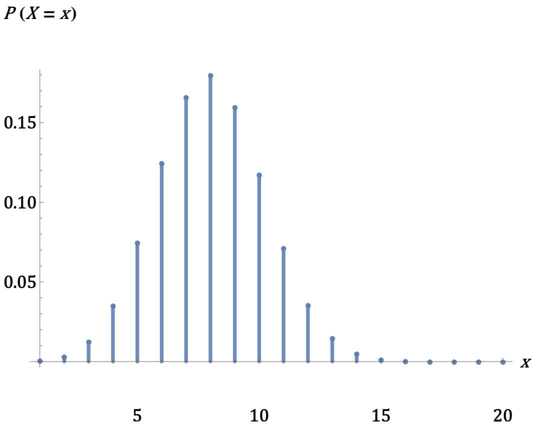
- Oznaczenie: $X \sim B(n, p)$

- Rozkład dwumianowy z parametrami $n = 3$ i $p > 0$:

$X \sim B(3, p)$,

k (x_i)	0	1	2	3
$P(X = k)$ (p_i)	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

Rozkład dwumianowy



Rozkład dwumianowy z parametrami $n = 20$ i $p = 0,4$.

Rozkład **dwumianowy**

Zmienna losowa X o rozkładzie dwumianowym

- Opisuje liczbę sukcesów w sekwencji n niezależnych eksperymentów, z których każdy kończy się:
  - albo sukcesem (z prawdopodobieństwem p),
  - albo porażką (z prawdopodobieństwem q).

Rozkład **dwumianowy**

Zmienna losowa X o rozkładzie dwumianowym

- Opisuje liczbę sukcesów w sekwencji n niezależnych eksperymentów, z których każdy kończy się:
  - albo sukcesem (z prawdopodobieństwem p),
  - albo porażką (z prawdopodobieństwem q).

Uwaga

Oczywiście dla $n = 1$ rozkład dwumianowy jest rozkładem dwupunktowym.

Rozkład dwumianowy

Przykład

- Rzucasz trzema symetrycznymi kostkami do gry i pytasz, na ilu z nich wypadły 3 oczka.
- Losową liczbę kostek z 3 oczkami opisuje zmienna losowa $X \sim B(n = 3, p = 1/6)$.

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\left(1 - \frac{1}{6}\right)^3$	$3\left(\frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2$	$3\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1 - \frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$

Źródło: `https://unsplash.com/` (Mike Szczepanski)

Rozkład **Poissona**

Rozkład **geometryczny**