Pewne szczególne rodzaje macierzy

Macierz zerowa

Definicja

Macierz $0 \in \mathbb{K}^{mn}$, która składa się z samych zer

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

nazywamy **macierzą zerową**.

Macierz zerowa

Definicja

Macierz $0 \in \mathbb{K}^{mn}$, która składa się z samych zer

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

nazywamy **macierzą zerową**.

Dla dowolnych macierzy $A \in \mathbb{K}^{km}$ oraz $B \in \mathbb{K}^{nl}$ mamy

$$A0 = 0 \in \mathbb{K}^{kn}, \quad 0B = 0 \in \mathbb{K}^{ml}.$$

Macierz diagonalna

Definicja

Dowolna macierz kwadratowa $A_m \in \mathbb{K}^{mm}$ postaci

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix},$$

nazywana jest **macierzą diagonalną**.

Macierz diagonalna

Definicja

Dowolna macierz kwadratowa $A_m \in \mathbb{K}^{mm}$ postaci

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix},$$

nazywana jest **macierzą diagonalną**.

Elementy $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ nazywane są **przekątną** macierzy bądź jej **diagonalą**.

Macierz jednostkowa

Definicja

Macierz $I_m \in \mathbb{K}^{mm}$ kwadratową diagonalną, która ma same jedynki na przekątnej

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

nazywamy **jednostkową**.

Macierz jednostkowa

Definicja

Macierz $I_m \in \mathbb{K}^{mm}$ kwadratową diagonalną, która ma same jedynki na przekątnej

$$I_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

nazywamy **jednostkową**.

Macierz taka zachowuje się w mnożeniu macierzowym jak 1 w mnożeniu skalarnym. Weźmy macierze $A \in \mathbb{K}^{km}$ oraz $B \in \mathbb{K}^{mn}$. Uzyskamy wtedy

$$AI_m = A, \quad I_m B = B.$$

Macierz odwrotna

Definicja

Macierz odwrotna do macierzy $A \in \mathbb{K}^{mm}$ to taka macierz $A^{-1} \in \mathbb{K}^{mm}$, która spełnia warunek

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_m.$$

Macierz odwrotna

Definicja

Macierz odwrotna do macierzy $A \in \mathbb{K}^{mm}$ to taka macierz $A^{-1} \in \mathbb{K}^{mm}$, która spełnia warunek

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_m.$$

Uwaga

- Macierz odwrotna A^{-1} do macierzy $A \in \mathbb{K}^{mm}$ **może (<u>ale nie musi!</u>) istnieć**.

Macierz odwrotna

Definicja

Macierz odwrotna do macierzy $A \in \mathbb{K}^{mm}$ to taka macierz $A^{-1} \in \mathbb{K}^{mm}$, która spełnia warunek

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_m.$$

Uwaga

- Macierz odwrotna A^{-1} do macierzy $A \in \mathbb{K}^{mm}$ **może (ale nie musi!) istnieć**.
- Ze względu na fakt, że macierze, które pojawią się w dalszej części szkolenia, zawsze będą mieć swoje macierze odwrotne (o pewnej szczególnej postaci), pomijamy tutaj kwestię warunków gwarantujących istnienie macierzy odwrotnej.

Iloczyn Kroneckera i iloczyn zewnętrzny

Iloczyn Kroneckera

Definicja

Dla danych dwóch macierzy $A \in \mathbb{K}^{mn}$ i $B \in \mathbb{K}^{kl}$ wynikiem ich **iloczynu Kroneckera** jest taka macierz $C \in \mathbb{K}^{m\times k, n\times l}$, która powstaje przez **pomnożenie każdego elementu macierzowego macierzy** A **przez całą macierz** B – tak jak w poniższym wzorze

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Wymiary macierzy wynikowej to $m \times k$ na $n \times l$.

Iloczyn Kroneckera

Własności iloczynu Kroneckera potrzebne do zrozumienia własności obwodów kwantowych:

- Brak przemienności: $A \otimes B \neq B \otimes A$;

Iloczyn Kroneckera

Własności iloczynu Kroneckera potrzebne do zrozumienia własności obwodów kwantowych:

- Brak przemienności: $A \otimes B \neq B \otimes A$;
- Rozdzielność iloczynu Kroneckera względem dodawania:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C,$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C;$$

Iloczyn Kroneckera

Własności iloczynu Kroneckera potrzebne do zrozumienia własności obwodów kwantowych:

- Brak przemienności: $A \otimes B \neq B \otimes A$;
- Rozdzielność iloczynu Kroneckera względem dodawania:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C,$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C;$$

- Łączność mnożenia przez skalar: $(\lambda A) \otimes B = A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B)$;

Iloczyn Kroneckera

Własności iloczynu Kroneckera potrzebne do zrozumienia własności obwodów kwantowych:

- Brak przemienności: $A \otimes B \neq B \otimes A$;
- Rozdzielność iloczynu Kroneckera względem dodawania:

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C,$$

$$(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C;$$

- Łączność mnożenia przez skalar: $(\lambda A) \otimes B = A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B)$;
- Łączność iloczynu Kroneckera: $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$;

Iloczyn Kroneckera

- Jeżeli możemy pomnożyć macierze A i C oraz B i D, to:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD);$$

Iloczyn Kroneckera

- Jeżeli możemy pomnożyć macierze A i C oraz B i D, to:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD);$$

- Istnienie i postać macierzy odwrotnej: $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;

Iloczyn Kroneckera

- Jeżeli możemy pomnożyć macierze A i C oraz B i D, to:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD);$$

- Istnienie i postać macierzy odwrotnej: $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$;
- Transpozycja oraz sprzężenie hermitowskie:

$$(A \otimes B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \otimes B^{\mathrm{T}}, \qquad (A \otimes B)^{\dagger} = A^{\dagger} \otimes B^{\dagger}.$$

Iloczyn zewnętrzny

Definicja

Wynikiem **iloczynu zewnętrznego** wektora kolumnowego $|u\rangle$ i wektora wierszowego $\langle v|$ jest macierz

$$|u\rangle\langle v| = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ldots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}.$$

Iloczyn zewnętrzny

Definicja

Wynikiem **iloczynu zewnętrznego** wektora kolumnowego $|u\rangle$ i wektora wierszowego $\langle v|$ jest macierz

$$|u\rangle\langle v| = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}.$$

Macierze unitarne i macierze hermitowskie

Macierze unitarne

Definicja

Macierze kwadratowe $U \in \mathbb{K}^{nn}$, które przy mnożeniu z prawej strony przez wektor nie zmieniają jego normy, tj.

$$\| U \left| u \right\rangle \| = \| \left| u \right\rangle \| \quad \text{dla każdego} \quad \left| u \right\rangle \in \mathbb{K}^{n},$$

nazywamy **macierzami unitarnymi**.

Macierze unitarne

Uwaga

- **Dla każdej macierzy unitarnej U istnieje jej macierz odwrotna U^{-1}**, tzn. taka macierz U^{-1}, dla której zachodzą równości

$$UU^{-1} = U^{-1}U = I_m.$$

Macierze unitarne

Uwaga

- **Dla każdej macierzy unitarnej U istnieje jej macierz odwrotna U^{-1}**, tzn. taka macierz U^{-1}, dla której zachodzą równości

$$UU^{-1} = U^{-1}U = I_m.$$

Właśnie dlatego macierze unitarne są często utożsamiane z obrotami.

Macierze unitarne

Uwaga

- **Dla każdej macierzy unitarnej U istnieje jej macierz odwrotna U^{-1}**, tzn. taka macierz U^{-1}, dla której zachodzą równości

$$UU^{-1} = U^{-1}U = I_m.$$

Właśnie dlatego macierze unitarne są często utożsamiane z obrotami.

- **Odwrotność macierzy unitarnej jest jej sprzężeniem hermitowskim**, tzn. $U^{-1} = U^{\dagger}$.

Macierze unitarne

Uwaga

- **Dla każdej macierzy unitarnej U istnieje jej macierz odwrotna U^{-1}**, tzn. taka macierz U^{-1}, dla której zachodzą równości

$$UU^{-1} = U^{-1}U = I_m.$$

Właśnie dlatego macierze unitarne są często utożsamiane z obrotami.

- **Odwrotność macierzy unitarnej jest jej sprzężeniem hermitowskim**, tzn. $U^{-1} = U^{\dagger}$.
- **Jeżeli U przekształca $|u\rangle$ na $|v\rangle$, to $U^{\dagger}$ przekształca $|v\rangle$ na $|u\rangle$**, tzn.

$$\text{jeżeli } |v\rangle = U|u\rangle, \quad \text{to } |u\rangle = U^{\dagger}|v\rangle.$$

Macierz hermitowska

Definicja

Macierz kwadratową, która jest **równa macierzy będącej jej sprzężeniem hermitowskim**, tj.

$$A = A^\dagger$$

nazywamy **macierzą hermitowską**[a].

[a] Od nazwiska francuskiego matematyka Charles'a Hermite'a (1822 – 1901).