Macierze i działania wykonywane na macierzach

Macierz

Definicja

Macierzą nazywamy **prostokątną tablicę liczb** (rzeczywistych bądź zespolonych), symboli lub wyrażeń.

Macierz

Definicja

Macierzą nazywamy **prostokątną tablicę liczb** (rzeczywistych bądź zespolonych), symboli lub wyrażeń.

Przykład

Przykład macierzy o wymiarach $m \times n$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Macierz

Uwaga

Liczby a_{ij} nazywamy elementami macierzy. Jeżeli liczby a_{ij} są rzeczywiste, to opisujemy macierz jako $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{mn}$, natomiast jeżeli są zespolone, opisujemy ją jako $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{mn}$.

W ogólności, będziemy pisać $A \in \mathbb{K}^{mn}$, gdzie $\mathbb{K}$ będzie oznaczać - w zależności od kontekstu - albo $\mathbb{R}$, albo $\mathbb{C}$.

Dodawanie macierzy

Jeżeli mamy dwie macierze $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{mn}$ **o identycznych rozmiarach**, np.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{i} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix},$$

to **możemy je do siebie dodawać**, otrzymując macierz $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{K}^{mn}$ postaci

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Mnożenie macierzy przez skalar

Mnożenie macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mn}$ **przez skalar** $\alpha \in \mathbb{K}$ polega na pomnożeniu każdego elementu tej macierzy przez dany skalar. Otrzymujemy macierz $\alpha\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mn}$ postaci

$$\alpha\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Transponowanie macierzy

Transpozycja macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mn}$ polega na zamianie wierszy tej macierzy z jej kolumnami. Otrzymujemy wówczas macierz $\mathbf{A}^T \in \mathbb{K}^{nm}$ postaci

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Transponowanie macierzy

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 7 \\ 5 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sprzężenie hermitowskie

Sprzężenie hermitowskie macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mn}$ to połączenie transpozycji macierzy ze sprzężeniem zespolonym każdego jej elementu; zatem $\mathbf{A}^{\dagger} \in \mathbb{K}^{nm}$ ma postać

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}.$$

Sprzężenie hermitowskie

Sprzężenie hermitowskie macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mn}$ to połączenie transpozycji macierzy ze sprzężeniem zespolonym każdego jej elementu; zatem $\mathbf{A}^{\dagger} \in \mathbb{K}^{nm}$ ma postać

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \begin{bmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Zauważmy, że dla macierzy rzeczywistych sprzężenie hermitowskie i transpozycja zachowują się tak samo.

Sprzężenie hermitowskie

Przykład

$$\begin{bmatrix} 1+2i & 5 & -2+3i \\ 4i & -1 & 2-2i \end{bmatrix}^{\dagger} = \begin{bmatrix} 1-2i & -4i \\ 5 & -1 \\ -2-3i & 2+2i \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy przez wektor kolumnowy

Mnożenie macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mn}$ **z prawej strony przez wektor kolumnowy** $|x\rangle \in \mathbb{K}^{n}$ daje w wyniku wektor $\mathbf{A}\,|x\rangle \in \mathbb{K}^{m}$:

$$\mathbf{A}\,|x\rangle = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Mnożenie macierzy przez wektor kolumnowy

Mnożenie macierzy $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mn}$ z prawej strony przez wektor kolumnowy $|x\rangle \in \mathbb{K}^{n}$ daje w wyniku wektor $\mathbf{A}|x\rangle \in \mathbb{K}^{m}$:

$$\mathbf{A}|x\rangle = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Uwaga

Zauważmy, że liczba elementów wektora „wejściowego” odpowiada liczbie wierszy macierzy, a liczba elementów wektora „wyjściowego” odpowiada liczbie kolumn.

Iloczyn macierzy

Dane są macierze $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mk}$ oraz $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{kn}$, takie że

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}.$$

Wynikiem **pomnożenia macierzy $\mathbf{A}$ przez macierz $\mathbf{B}$** jest macierz $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{mn}$ postaci

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix},$$

gdzie $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b2j + \ldots + a_{ik}b_{kj}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Iloczyn macierzy

Dane są macierze $\mathbf{A} \in \mathbb{K}^{mk}$ oraz $\mathbf{B} \in \mathbb{K}^{kn}$, takie że

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix}.$$

Wynikiem **pomnożenia macierzy $\mathbf{A}$ przez macierz $\mathbf{B}$** jest macierz $\mathbf{C} \in \mathbb{K}^{mn}$ postaci

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix},$$

gdzie $c_{2n} = a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \ldots + a_{2k}b_{kn}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2 \ldots, n\}$.

Iloczyn macierzy

Uwaga

Jeśli zapiszemy macierz $\mathbf{A}$ jako wektor kolumnowy wektorów wierszowych, tzn.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \\ \vdots \\ \langle a_m| \end{bmatrix},$$

gdzie $\langle a_1| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \end{bmatrix}, \dots, \langle a_m| = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{bmatrix}$,

Iloczyn macierzy

Uwaga

oraz macierz $\mathbf{B}$ – jako wektor wierszowy wektorów kolumnowych, tzn.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} |b_1\rangle & |b_2\rangle & \dots & |b_n\rangle \end{bmatrix},$$

gdzie

$$|b_1\rangle = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{k1} \end{bmatrix}, \quad |b_2\rangle = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{k2} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad |b_n\rangle = \begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{bmatrix},$$

Iloczyn macierzy

Uwaga

to iloczyn macierzy $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ można zapisać **jako macierz iloczynów skalarnych**

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \langle a_1|b_1\rangle & \langle a_1|b_2\rangle & \cdots & \langle a_1|b_n\rangle \\ \langle a_2|b_1\rangle & \langle a_2|b_2\rangle & \cdots & \langle a_2|b_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_m|b_1\rangle & \langle a_m|b_2\rangle & \cdots & \langle a_m|b_n\rangle \end{bmatrix}.$$

Iloczyn macierzy

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \langle a_1| \\ \langle a_2| \\ \vdots \\ \langle a_m| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |b_1\rangle & |b_2\rangle & \dots & |b_n\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle a_1|b_1\rangle & \langle a_1|b_2\rangle & \cdots & \langle a_1|b_n\rangle \\ \langle a_2|b_1\rangle & \langle a_2|b_2\rangle & \cdots & \langle a_2|b_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_m|b_1\rangle & \langle a_m|b_2\rangle & \cdots & \langle a_m|b_n\rangle \end{bmatrix}$$