Norma euklidesowa

Norma wektora

Jeśli dana przestrzeń wektorowa V jest wyposażona w iloczyn skalarny $\langle\cdot|\cdot\rangle$, to możemy w niej zdefiniować normę – będącą uogólnieniem pojęcia długości wektorów.

Norma wektora

Jeśli dana przestrzeń wektorowa V jest wyposażona w iloczyn skalarny $\langle\cdot|\cdot\rangle$, to możemy w niej zdefiniować normę – będącą uogólnieniem pojęcia długości wektorów.

Definicja

Norma w przestrzeni V to odwzorowanie $\|\cdot\| : V \to [0, \infty)$ o następujących własnościach:

- Dla każdego wektora $|u\rangle \in V$ i skalara $\alpha \in \mathbb{K}$: $\|\alpha\,|u\rangle\| = |a|\||u\rangle\|$ (dodatnia jednorodność);
- Dla każdych dwóch wektorów $|u\rangle, |v\rangle \in V$: $\||u\rangle + |v\rangle\| \leqslant \||u\rangle\| + \||v\rangle\|$ (nierówność trójkąta);
- Jeśli $\||u\rangle\| = 0$, to $|u\rangle = 0$ (niezdegenerowanie).

Norma eukidesowa

W przestrzeni współrzędnych $V = \mathbb{R}^n$ lub $V = \mathbb{C}^n$ można wprowadzić wiele norm, jednak nas będzie interesować tylko **norma euklidesowa**, **indukowana przez iloczyn skalarny**

$$\| |u\rangle \| = \sqrt{\langle u|u\rangle}.$$

Norma eukidesowa

Normę euklidesową dla wektora kolumnowego

$$|u\rangle = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

wyznaczamy ze wzoru

$$\begin{aligned} \| |u\rangle \| = \sqrt{\langle u|u\rangle} &= \sqrt{\overline{x_1}x_1 + \overline{x_2}x_2 + \ldots + \overline{x_n}x_n} \\ &= \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}. \end{aligned}$$

Wektor unormowany. Wektory ortogonalne

Wektor unormowany

Definicja

Wektor $|u\rangle$ taki, że $\||u\rangle\| = 1$, nazywamy **unormowanym**.

Wektory ortogonalne

Definicja

Dwa wektory $|u\rangle$ i $|v\rangle$ nazywamy **ortogonalnymi** (lub inaczej – prostopadłymi), gdy ich iloczyn skalarny wynosi zero, tzn. gdy

$$\langle u|v\rangle = 0.$$

Wektory ortogonalne

Definicja

Dwa wektory $|u\rangle$ i $|v\rangle$ nazywamy **ortogonalnymi** (lub inaczej – prostopadłymi), gdy ich iloczyn skalarny wynosi zero, tzn. gdy

$$\langle u|v\rangle = 0.$$

Jeżeli wektory $|u\rangle$ i $|v\rangle$ są unormowane i ortogonalne, to nazywamy je **ortonormalnymi**.