Elementy algebry liniowej

Hanna Wojewódka-Ściążko
współautor: Piotr Gawron, redaktor pomocniczy: Łukasz Pawela

Instytut Informatyki Teoretycznej i Stosowanej Polskiej Akademii Nauk

Plan wykładu

Pierwsza godzina wykładu:

- Liczby zespolone.
- **Wektory**.
- **Iloczyn skalarny wektorów**. **Baza** i wymiar przestrzeni wektorowej.
- Norma euklidesowa. Wektory **unormowane** i **ortogonalne**.

Druga godzina wykładu:

- **Macierze** i działania wykonywane na macierzach.
- Pewne szczególne rodzaje macierzy.
- **Wartości i wektory własne**.

Liczby zespolone

Liczba zespolona – definicja

Definicja

Jednostką urojoną nazywamy taką liczbę i, dla której $\mathrm{i}^2 = -1$.

Liczba zespolona – definicja

Definicja

Jednostką urojoną nazywamy taką liczbę i, dla której $\mathrm{i}^2 = -1$.

Definicja

Liczbą zespoloną nazywamy dowolną liczbę z taką, że

$$z = a + b\mathrm{i},$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.

Liczba zespolona – definicja

Definicja

Jednostką urojoną nazywamy taką liczbę i, dla której $\mathrm{i}^2 = -1$.

Definicja

Liczbą zespoloną nazywamy dowolną liczbę z taką, że

$$z = a + b\mathrm{i},$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.

- Liczbę rzeczywistą a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z (oznaczenie: $\operatorname{Re} z$).
- Liczbę rzeczywistą b nazywamy **częścią urojoną** liczby z (oznaczenie: $\operatorname{Im} z$).

Liczba zespolona – definicja

Definicja

Jednostką urojoną nazywamy taką liczbę i, dla której $\mathrm{i}^2 = -1$.

Definicja

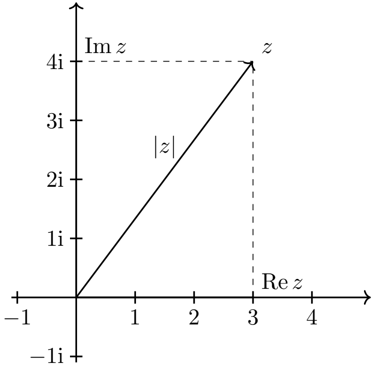
Liczbą zespoloną nazywamy dowolną liczbę z taką, że

$$z = a + b\mathrm{i},$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi.

- Liczbę rzeczywistą a nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby z (oznaczenie: $\operatorname{Re} z$).
- Liczbę rzeczywistą b nazywamy **częścią urojoną** liczby z (oznaczenie: $\operatorname{Im} z$).
- **Zbiór wszystkich liczb zespolonych** oznaczamy symbolem $\mathbb{C}$.

Liczba zespolona – interpretacja graficzna



Rysunek: **Płaszczyzna zespolona** $\mathbb{C}$ oraz **liczba zespolona** $z = 3 + 4\mathrm{i}$ (na końcu strzałki).

Moduł i argument liczby zespolonej

Definicja

Modułem liczby zespolonej nazywamy wartość

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Uwaga: Moduł liczby zespolonej jest rzeczywisty i zawsze większy lub równy zero.

Moduł i argument liczby zespolonej

Definicja

Modułem liczby zespolonej nazywamy wartość

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

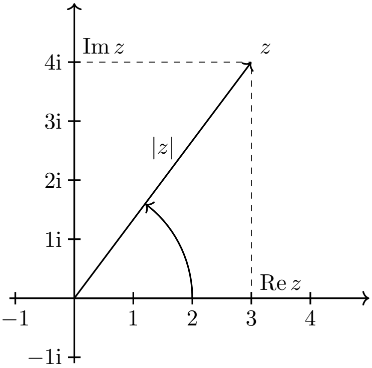
Uwaga: Moduł liczby zespolonej jest rzeczywisty i zawsze większy lub równy zero.

Definicja

Argumentem liczby zespolonej $z = a + bi \neq 0 + 0i$ nazywamy liczbę rzeczywistą ϕ z przedziału $[0, 2\pi)$ spełniającą układ równań

$$\cos\phi = \frac{a}{|z|} \quad \text{oraz} \quad \sin\phi = \frac{b}{|z|}.$$

Moduł i argument liczby zespolonej – interpretacja graficzna



Rysunek: **Moduł** $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ liczby $z = z = 3 + 4\mathrm{i}$ to długość strzałki. **Argument** z to wartość kąta skierowanego $\phi = \arccos \frac{3}{5} \approx 0{,}92$ rad.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Uwaga

Liczbę zespoloną $z = a + bi \neq 0 + 0\mathrm{i}$ można zapisać w **postaci trygonometrycznej**

$$z = |z|\,(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi),$$

gdzie ϕ jest argumentem liczby zespolonej.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Uwaga

Liczbę zespoloną $z = a + bi \neq 0 + 0\mathrm{i}$ można zapisać w **postaci trygonometrycznej**

$$z = |z|\,(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi),$$

gdzie ϕ jest argumentem liczby zespolonej.

Wzór Eurela: $e^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$ dla każdego $\phi \in \mathbb{R}$.

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Uwaga

Liczbę zespoloną $z = a + bi \neq 0 + 0\mathrm{i}$ można zapisać w **postaci trygonometrycznej**

$$z = |z|\,(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi),$$

gdzie ϕ jest argumentem liczby zespolonej.

Wzór Eurela: $e^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi$ dla każdego $\phi \in \mathbb{R}$.

Równoważnie

$$z = |z|e^{\mathrm{i}\phi}. \qquad (|e^{\mathrm{i}\phi}| = 1)$$

Sprzężenie liczby zespolonej

Definicja

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + bi$ jest liczba

$$\overline{z} = a - bi.$$

Sprzężenie liczby zespolonej

Definicja

Sprzężeniem liczby zespolonej $z = a + b\mathrm{i}$ jest liczba

$$\overline{z} = a - b\mathrm{i}.$$

Interpretacja graficzna:

Sprzężenie może być rozumiane jako odbicie symetryczne liczby względem osi rzeczywistej.

Operacje arytmetyczne na liczbach zespolonych

Operacje arytmetyczne na liczbach zespolonych

Niech $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ oraz $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$.

Operacje arytmetyczne na liczbach zespolonych

Niech $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ oraz $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$.

Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}, \qquad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}.$$

Operacje arytmetyczne na liczbach zespolonych

Niech $z_1 = a_1 + b_1\mathrm{i}$ oraz $z_2 = a_2 + b_2\mathrm{i}$.

Dodawanie i odejmowanie liczb zespolonych

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}, \qquad z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\mathrm{i}.$$

Mnożenie i dzielenie liczb zespolonych

$$z_1 z_2 = (a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i}) = a_1a_2 + a_1b_2\mathrm{i} + b_1a_2 i - b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1a_2 + b_1b_2)\mathrm{i},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1\mathrm{i}}{a_2 + b_2\mathrm{i}} = \frac{(a_1 + b_1\mathrm{i}) \cdot (a_2 - b_2\mathrm{i})}{(a_2 + b_2\mathrm{i}) \cdot (a_2 - b_2\mathrm{i})} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)\left(\frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)\mathrm{i}.$$

Mnożenie i dzielenie – z wykorzystaniem postaci trygonometrycznej

Uwaga

Jeśli zapiszemy liczby zespolone z_1, z_2 w postaci trygonometrycznej, tzn.

$$z_1 = |z_1|e^{\mathrm{i}\phi_1}, \quad z_2 = |z_2|e^{\mathrm{i}\phi_2},$$

Mnożenie i dzielenie – z wykorzystaniem postaci trygonometrycznej

Uwaga

Jeśli zapiszemy liczby zespolone z_1, z_2 w postaci trygonometrycznej, tzn.

$$z_1 = |z_1|e^{\mathrm{i}\phi_1}, \quad z_2 = |z_2|e^{\mathrm{i}\phi_2},$$

to

- iloczyn tych liczb uzyskamy, mnożąc ich amplitudy i dodając fazy,

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)},$$

Mnożenie i dzielenie – z wykorzystaniem postaci trygonometrycznej

Uwaga

Jeśli zapiszemy liczby zespolone z_1, z_2 w postaci trygonometrycznej, tzn.

$$z_1 = |z_1|e^{\mathrm{i}\phi_1}, \quad z_2 = |z_2|e^{\mathrm{i}\phi_2},$$

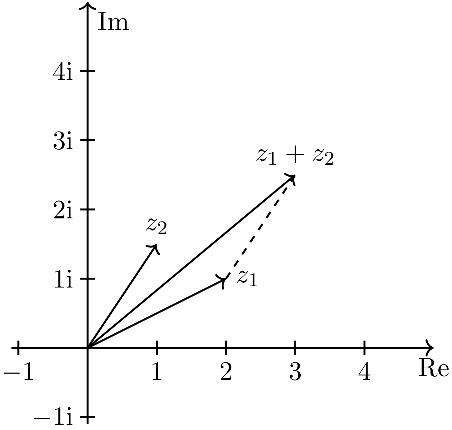
to

- iloczyn tych liczb uzyskamy, mnożąc ich amplitudy i dodając fazy,

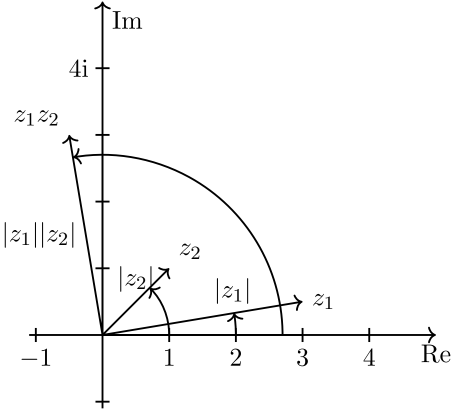
$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{\mathrm{i}(\phi_1+\phi_2)},$$

- iloraz tych liczb uzyskujemy, dzieląc amplitudy i odejmując fazy,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{\mathrm{i}(\phi_1-\phi_2)}.$$



(a) Dodawanie liczb zespolonych.



(b) Mnożenie liczb zespolonych.

Operacje arytmetyczne na liczbach zespolonych

Zauważmy, że dla liczby zespolonej $z = a + b\mathrm{i}$ mamy

$$\bar{z}z = \overline{(a + b\mathrm{i})}(a + b\mathrm{i}) = (a - b\mathrm{i})(a + b\mathrm{i}) = a^2 - b^2\mathrm{i}^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$