Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne

Dany jest ciąg

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie

Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne

Dany jest ciąg

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie
(zmienne mają jednakowe wartości oczekiwane i wariancje:

$$\mathbb{E}(X_1) = \ldots = \mathbb{E}(X_n) = m, \qquad D^2(X_1) = \ldots = D^2(X_n) = \sigma^2)$$

Centralne twierdzenie graniczne

Centralne twierdzenie graniczne

Dany jest ciąg

$$X_1, X_2, \ldots, X_n$$

niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie
(zmienne mają jednakowe wartości oczekiwane i wariancje:

$$\mathbb{E}(X_1) = \ldots = \mathbb{E}(X_n) = m, \qquad D^2(X_1) = \ldots = D^2(X_n) = \sigma^2)$$

Wówczas dla odpowiednio dużych n rozkład zmiennej losowej

$$Z_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

można przybliżać rozkładem normalnym $\mathcal{N}\left(nm, \sigma^2 n\right)$.

Rozkład **chi-kwadrat** i rozkład **Studenta**

Rozkład **chi-kwadrat** z k stopniami swobody

Rozkład **chi-kwadrat z k stopniami swobody** to rozkład zmiennej losowej χ^2_k:

$$\chi^2_k = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2,$$

gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_k$ są niezależne i wszystkie mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.

Rozkład **chi-kwadrat** z k stopniami swobody

Zmienna χ^2_k przyjmuje wartości dodatnie, a jej **rozkład zależy od liczby stopni swobody**:

Rozkład **chi-kwadrat** z k stopniami swobody

Zmienna χ^2_k przyjmuje wartości dodatnie, a jej **rozkład zależy od liczby stopni swobody**:

- mała wartość k – rozkład silnie **asymetryczny**,
- coraz większe wartości k – rozkład coraz bardziej symetryczny i **bliższy normalnemu**.

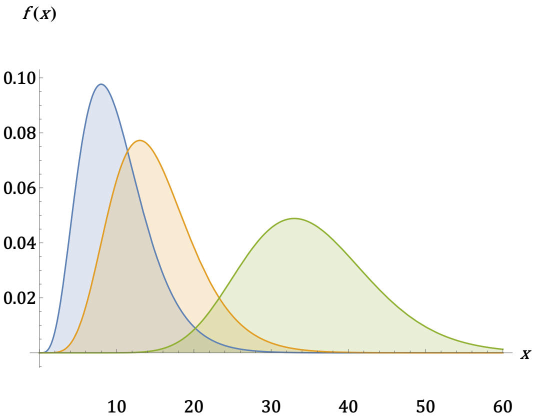
Rozkład **chi-kwadrat** z k stopniami swobody

Zmienna χ_k^2 przyjmuje wartości dodatnie, a jej **rozkład zależy od liczby stopni swobody**:

- mała wartość k – rozkład silnie **asymetryczny**,
- coraz większe wartości k – rozkład coraz bardziej symetryczny i **bliższy normalnemu**.

- Dla $k < 30$ korzystamy z **tablic chi-kwadrat**.
- Dla $k \geqslant 30$ korzystamy z **przybliżenia rozkładu** $\sqrt{2\chi_k^2}$ **rozkładem** $\mathcal{N}\left(\sqrt{2k-1}, 1\right)$.

Rozkład **chi-kwadrat** z k stopniami swobody



Rysunek: Rozkład chi-kwadrat z k stopniami swobody dla k równego odpowiednio: 10, 15 i 35.

Rozkład **Studenta** z k stopniami swobody

Rozkład **Studenta z k stopniami swobody** to rozkład zmiennej T_k:

$$T_k = \frac{T}{\sqrt{\chi_k^2}}\sqrt{k},$$

gdzie T i χ_k^2 są niezależne oraz

- T ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$,
- χ_k^2 ma rozkład chi-kwadrat z k stopniami swobody.

Rozkład **Studenta** z k stopniami swobody

Rozkład Studenta jest:

- **symetryczny** względem prostej $x = 0$,
- zbliżony kształtem do rozkładu **normalnego** (mimo że **nieco bardziej spłaszczony**).

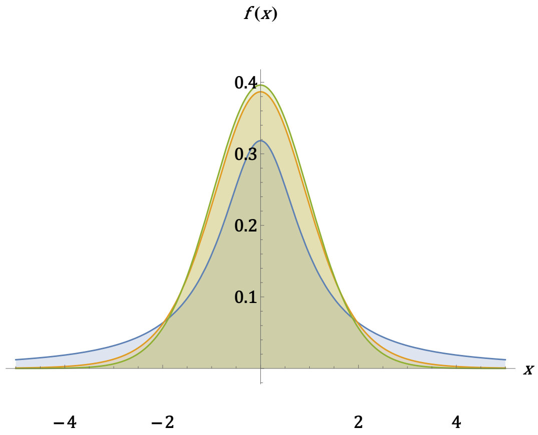
Rozkład **Studenta** z k stopniami swobody

Rozkład Studenta jest:

- **symetryczny** względem prostej $x = 0$,
- zbliżony kształtem do rozkładu **normalnego** (mimo że **nieco bardziej spłaszczony**).

- Dla $\underline{k < 30}$ korzystamy z **tablic**.
- Dla $\underline{k \geqslant 30}$ korzystamy z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$.

Rozkład **Studenta** z k stopniami swobody



Rysunek: Rozkład Studenta z k stopniami swobody dla k równego odpowiednio: 1, 8 i 35.

Bibliografia

Wykład i slajdy zostały przygotowane w oparciu o następującą literaturę:

[1] P. Billingsley, *Probability and measure*, John Wiley & Sons, New York 1986.

[2] G. Grimmett and D. Welsh, *Probability. An introduction*, Clarendon Press, Oxford 1986.

[3] J. Jakubowski, R. Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Wydanie II, SCRIPT, Warszawa 2001.

[4] W. Krysicki, J. Bartos, W. Dyczka, K. Królikowska, M. Wasilewski, *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach*, część I, *Rachunek prawdopodobieństwa*, Wydawnictwo naukowe PWN, Warszawa 1998.

[5] **H. Pishro-Nik, *Introduction to Probability, Statistics, and Random Processes*, available at** `https://www.probabilitycourse.com/`**, Kappa Research LLC, 2014**.

[6] M. Sobczyk, *Statystyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1999.