Zmienna losowa absolutnie ciągła

Zmienna losowa absolutnie ciągła

Zmienną losową X nazywamy **absolutnie ciągłą**, jeśli

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\,du \quad \text{dla dowolnego} \quad u \in \mathbb{R}$$

dla pewnej nieujemnej funkcji f_X, zwanej **funkcją gęstości** zmiennej X. $\quad (f(x) = F'(x))$

- Rozkład:

$$\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \int_{a}^{b} f_X(u)du \quad \text{for all} \quad a, b \in \mathbb{R},\ a \leqslant b$$

Charakterystyki liczbowe zmiennej losowej absolutnie ciągłej

Charakterystyki liczbowe zmiennej losowej absolutnie ciągłej

- Wartość oczekiwana:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

Charakterystyki liczbowe zmiennej losowej absolutnie ciągłej

- Wartość oczekiwana:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

- Wariancja:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx\right)^2$$

Charakterystyki liczbowe zmiennej losowej absolutnie ciągłej

- Wartość oczekiwana:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx$$

- Wariancja:

$$D^2(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\, dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\, dx\right)^2$$

- Odchylenie standardowe:

$$\sqrt{D^2(X)}$$

Przykłady rozkładów prawdopodobieństwa absolutnie ciągłych

Rozkład **jednostajny ciągły** (ang. *continuous uniform distribution*)

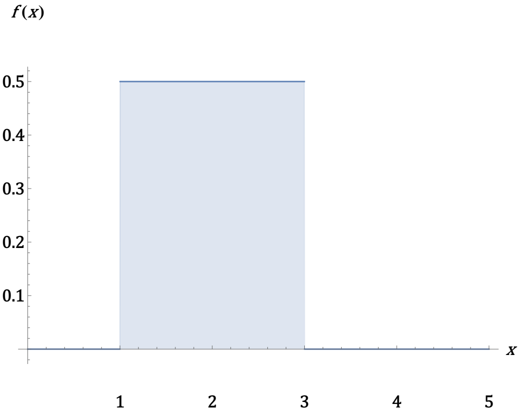
Rozkład **jednostajny ciągły** na odcinku $[a, b]$

- Zmienna losowa X ma rozkład jednostajnie ciągły na odcinku $[a, b]$, jeśli X przyjmuje dowolne wartości rzeczywiste z przedziału $[a, b]$, oraz

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{gdy} \quad x \in [a, b] \\ 0, & \text{gdy} \quad x \notin [a, b] \end{cases} .$$

- Oznaczenie: $X \sim U(a, b)$

Rozkład **jednostajny ciągły** na odcinku $[a, b]$



Rozkład jednostajny ciągły na odcinku $[1, 3]$. $(X \sim U(1,3))$

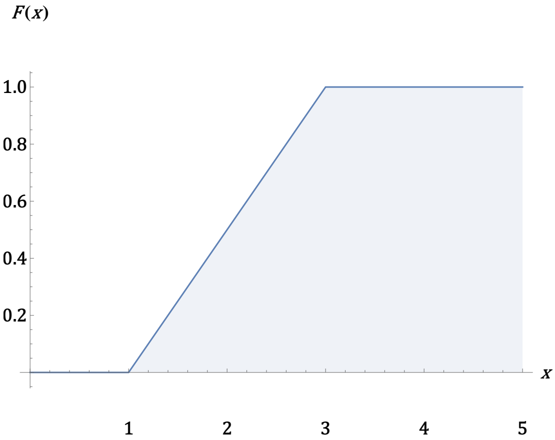
$f_X(x) = \frac{1}{2}$ dla $x \in [1, 3]$ oraz $f_X(x) = 0$ dla $x \notin [1, 3]$

Rozkład **jednostajny ciągły** na odcinku $[a, b]$

- Dystrybuanta:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \begin{cases} 0, & \text{gdy} \quad x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{gdy} \quad a \leqslant x < b \\ 1, & \text{gdy} \quad x \geqslant b \end{cases}$$

Rozkład **jednostajny ciągły** na odcinku $[a, b]$



Dystrybuanta rozkładu jednostajnego ciągły na odcinku $[1, 3]$. $(X \sim U(1, 3))$

Rozkład **normalny**

Rozkład **normalny** z parametrami m i σ^2

Rozkład normalny

- Odgrywa ważną rolę **w statystyce**.
- Jest wykorzystywany **w naukach przyrodniczych i społecznych**, np. do reprezentowania zmiennych losowych o wartościach rzeczywistych, których rozkłady nie są znane.

Rozkład **normalny** z parametrami m i σ^2

Rozkład normalny

- Odgrywa ważną rolę **w statystyce**.
- Jest wykorzystywany **w naukach przyrodniczych i społecznych**, np. do reprezentowania zmiennych losowych o wartościach rzeczywistych, których rozkłady nie są znane.

- Oznaczenie: $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

  $m := \mathbb{E}(X)$ – wartość średnia (wartość oczekiwana rozkładu)

  $\sigma^2 := D^2(X)$ – wariancja rozkładu

Rozkład **normalny** z parametrami m i σ^2

Rozkład normalny

- Odgrywa ważną rolę **w statystyce**.
- Jest wykorzystywany **w naukach przyrodniczych i społecznych**, np. do reprezentowania zmiennych losowych o wartościach rzeczywistych, których rozkłady nie są znane.

- Oznaczenie: $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

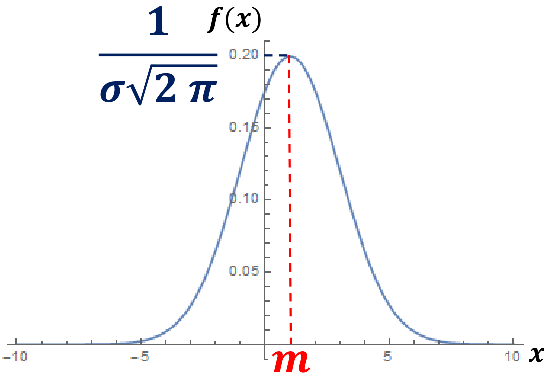
  $m := \mathbb{E}(X)$ – wartość średnia (wartość oczekiwana rozkładu)

  $\sigma^2 := D^2(X)$ – wariancja rozkładu

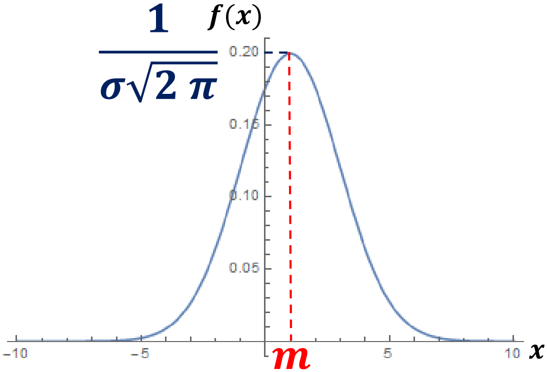
- Zmienna X ma normalny z parametrami m i σ^2, jeśli przyjmuje dowolne wartości w $\mathbb{R}$, oraz

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozkład **normalny** z parametrami m i σ^2

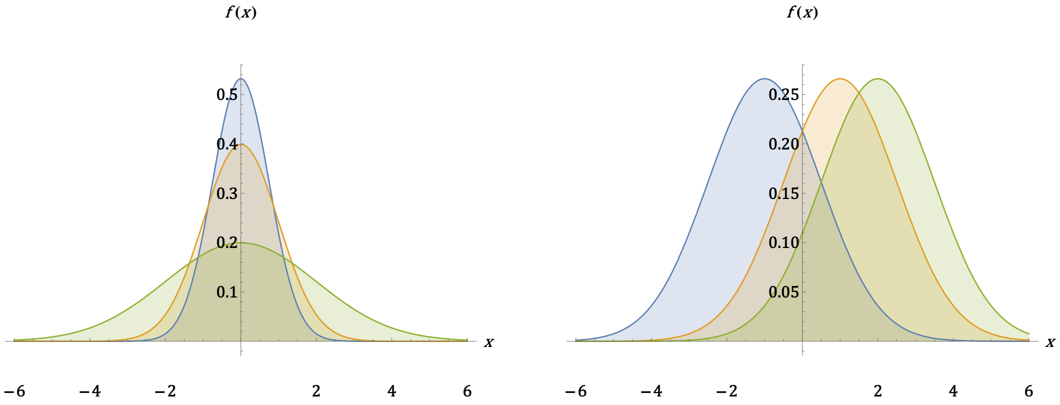


Rozkład **normalny** z parametrami m i σ^2



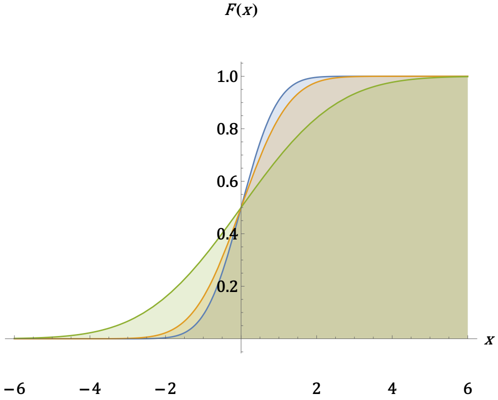
- Maksymalna wartość funkcji f – w punkcie m $\left(f(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$.
- Rozkład **symetryczny**.
- Im mniejsza wartość σ, tym rozkład jest bardziej skupiony wokół średniej.

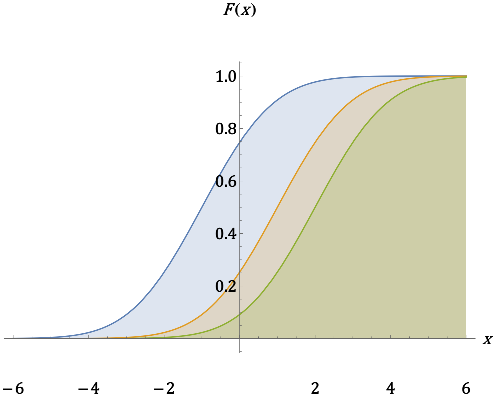
Rozkład **normalny** z parametrami m i σ^2



Po lewej: rozkłady normalne o zerowej średniej i wiarancjach odpowiednio 0,75, 1 i 2.
Po prawej: rozkłady normalne o jednakowych wariancjach i średnich odpowiednio -1, 1 i 2.

Dystrybuanta rozkładu normalnego





Po lewej: dystrybuanta rozkładu normalnego o wiarancjach odpowiednio 0,75, 1 i 2.
Po prawej: dystrybuanta rozkładu normalnego o średnich odpowiednio -1, 1 i 2.

Rozkład **normalny standardowy**

Rozkład **normalny standardowy**

- Oznaczenie: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (tzn. $m = 0, \sigma^2 = 1$)

- Funkcja gęstości:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Rozkład **normalny standardowy**

- Oznaczenie: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ (tzn. $m = 0, \sigma^2 = 1$)
- Funkcja gęstości:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{dla} \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Dystrybuanta (jej wartości można odczytać z tablic – **tablice rozkładu normalnego**)

$$\Phi(x) = F_X(x) = \mathbb{P}(X \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Rozkład **normalny standardowy** – tablice

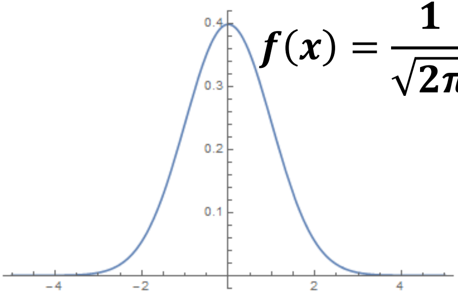
u	0,00	0,01	0,02	0,03	...
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	...
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	...
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

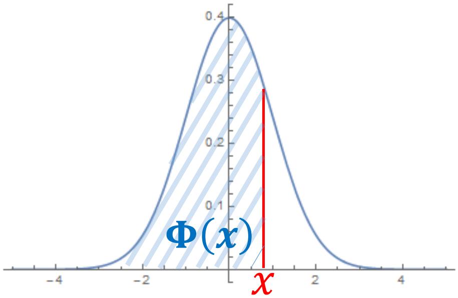
Wartość $\Phi(u)$ dystrybuanty rozkładu normalnego standardowego $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\Phi(0,12) = 0,5478$$

Rozkład **normalny standardowy** – wykres funkcji gęstości

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$





$$\Phi(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$