

## ❖ Zmienna losowa

### Zmienna losowa

Funkcja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , która każdemu możliwemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje wartość rzeczywistą.



## ❖ Zmienna losowa

### Zmienna losowa

Funkcja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , która każdemu możliwemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje wartość rzeczywistą.

### Zmienna losowa dyskretna

Przyjmuje tylko skończoną lub przeliczalną liczbę wartości.



## ❖ Zmienna losowa

### Zmienna losowa

Funkcja  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , która każdemu możliwemu wynikowi doświadczenia losowego przypisuje wartość rzeczywistą.

### Zmienna losowa dyskretna

Przyjmuje tylko skończoną lub przeliczalną liczbę wartości.

### Zmienna losowa ciągła

Teoretycznie **może przyjąć dowolną wartość z określonego przedziału.**



## ❖ Rozkład zmiennej losowej

### Rozkład zmiennej losowej dyskretnej

Określa baza  $\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots\}$ , gdzie

$p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$  są wartościami z przedziału  $[0, 1]$  takimi, że  $p_1 + p_2 + \dots = 1$ .

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$p_1 = \mathbb{P}(X = x_1)$	$p_2 = \mathbb{P}(X = x_2)$	$p_3 = \mathbb{P}(X = x_3)$	$\dots$



## ❖ Rozkład zmiennej losowej

### Rozkład zmiennej losowej dyskretnej

Określa baza  $\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots\}$ , gdzie

$p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$  są wartościami z przedziału  $[0, 1]$  takimi, że  $p_1 + p_2 + \dots = 1$ .

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$p_1 = \mathbb{P}(X = x_1)$	$p_2 = \mathbb{P}(X = x_2)$	$p_3 = \mathbb{P}(X = x_3)$	$\dots$

### Rozkład zmiennej losowej ciągłej

## ❖ Rozkład zmiennej losowej

### Rozkład zmiennej losowej dyskretnej

Określa baza  $\{(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots\}$ , gdzie

$p_i := \mathbb{P}(X = x_i)$  są wartościami z przedziału  $[0, 1]$  takimi, że  $p_1 + p_2 + \dots = 1$ .

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$p_1 = \mathbb{P}(X = x_1)$	$p_2 = \mathbb{P}(X = x_2)$	$p_3 = \mathbb{P}(X = x_3)$	$\dots$

### Rozkład zmiennej losowej ciągłej

$\mathbb{P}(X = x) = 0$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ .

# Dystrybuanta zmiennej losowej



## ❖ Dystrybuanta zmiennej losowej

### Definicja

**Dystrybuantą zmiennej losowej  $X$**  nazywamy funkcję

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$





## ❖ Dystrybuanta zmiennej losowej

### Definicja

**Dystrybuantą zmiennej losowej  $X$**  nazywamy funkcję

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

### Własności dystrybuanty



## ❖ Dystrybuanta zmiennej losowej

### Definicja

**Dystrybuantą zmiennej losowej  $X$**  nazywamy funkcję

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

### Własności dystrybuanty

- ▶  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$



## ❖ Dystrybuanta zmiennej losowej

### Definicja

**Dystrybuantą zmiennej losowej  $X$**  nazywamy funkcję

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

### Własności dystrybuanty

- ▶  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$
- ▶  $F_X$  jest funkcją niemalejącą i prawostronnie ciągłą



## ❖ Dystrybuanta zmiennej losowej

### Definicja

**Dystrybuantą zmiennej losowej  $X$**  nazywamy funkcję

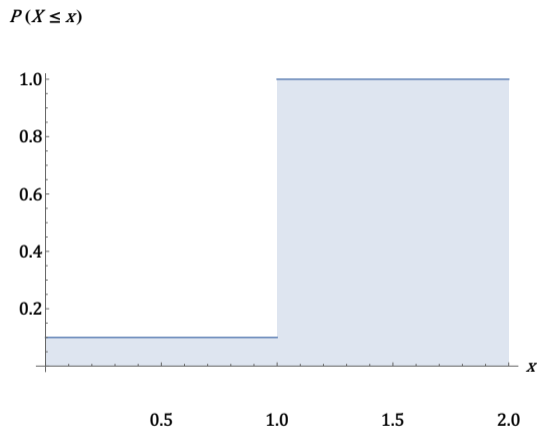
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}).$$

### Własności dystrybuanty

- ▶  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$
- ▶  $F_X$  jest funkcją niemalejącą i prawostronnie ciągłą
- ▶  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  oraz  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$



## Dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej (rozkład dwupunktowy)



Dystrybuanta rozkładu dwupunktowego z parametrem  $p = 0,9$ .



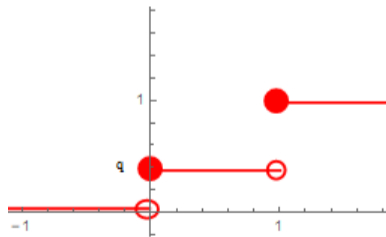
## ❖ Dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej (rozkład dwupunktowy)

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ q & \text{for } x \in [0, 1) \\ q + p = 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$

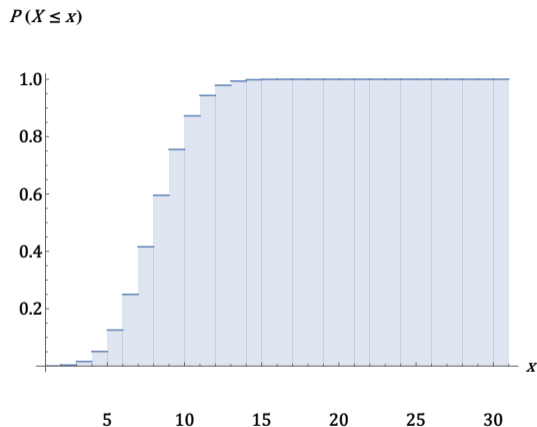


# ❖ Dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej (rozkład dwupunktowy)

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ q & \text{for } x \in [0, 1) \\ q + p = 1 & \text{for } x \geq 1 \end{cases}$$



## Dystrybuanta zmiennej losowej dyskretnej (rozkład dwumianowy)

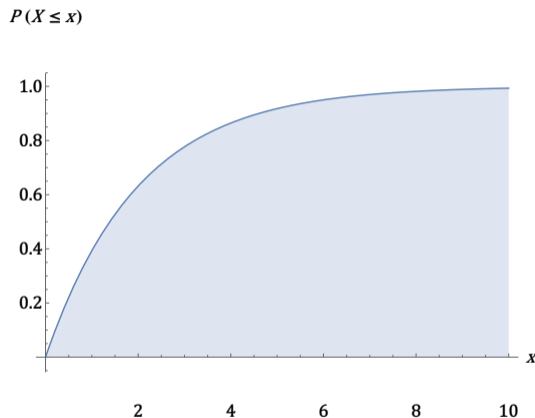


Dystrybuanta rozkładu dwumianowego z parametrami  $n = 20$  i  $p = 0,4$ .





## ✦ Dystrybuanta zmiennej losowej typu ciągłego



Dystrybuanta rozkładu wykładniczego z parametrem  $\lambda = \frac{1}{2}$ :  $F_X(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}}$  dla  $x \in \mathbb{R}$ .



# Zmienna losowa ciągła i absolutnie ciągła – definicje formalne



## ❖ Zmienna losowa ciągła

### Definicja

Zmienną losową  $X$  o dystrybucanie  $F_X$  nazwiemy **ciągłą**,  
jeśli  $F_X$  **jest funkcją ciągłą** (lub równoważnie: jeśli  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ ).



## ❖ Zmienna losowa ciągła

### Definicja

Zmienną losową  $X$  o dystrybuancie  $F_X$  nazwiemy **ciągłą**, jeśli  $F_X$  **jest funkcją ciągłą** (lub równoważnie: jeśli  $\mathbb{P}(X = x) = 0$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ ).

### Definicja

Zmienną losową  $X$  nazywamy **absolutnie ciągłą**, jeśli

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du \quad \text{dla dowolnego } u \in \mathbb{R}$$

dla pewnej nieujemnej funkcji  $f_X$ , zwanej **funkcją gęstości** zmiennej  $X$ . ( $f(x) = F'_X(x)$ )



## ❖ Rozkład zmiennej losowej typu ciągłego

### Rozkład zmiennej losowej typu ciągłego

Dla zmiennej losowej absolutnie ciągłej odpowiednikiem bazy (określającej rozkład zmiennej losowej dyskretnej) jest **funkcja gęstości**  $f_X$ .

## ❖ Rozkład zmiennej losowej typu ciągłego

### Rozkład zmiennej losowej typu ciągłego

Dla zmiennej losowej absolutnie ciągłej odpowiednikiem bazy (określającej rozkład zmiennej losowej dyskretnej) jest **funkcja gęstości**  $f_X$ .

Własności funkcji gęstości  $f_X$ :

- ▶  $f_X(x) \geq 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$  (nieujemność – odpowiednik własności  $p_i \geq 0$  dla  $i \in \{1, 2, \dots\}$ )
- ▶  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$  (unormowanie – odpowiednik własności  $p_1 + p_2 + \dots = 1$ )

## ❖ Rozkład zmiennej losowej typu ciągłego

### Rozkład zmiennej losowej typu ciągłego

Dla zmiennej losowej absolutnie ciągłej odpowiednikiem bazy (określającej rozkład zmiennej losowej dyskretnej) jest **funkcja gęstości**  $f_X$ .

Własności funkcji gęstości  $f_X$ :

- ▶  $f_X(x) \geq 0$  dla  $x \in \mathbb{R}$  (nieujemność – odpowiednik własności  $p_i \geq 0$  dla  $i \in \{1, 2, \dots\}$ )
- ▶  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$  (unormowanie – odpowiednik własności  $p_1 + p_2 + \dots = 1$ )

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(u) du$$

$$\left( \text{odpowiednik wzoru: } \mathbb{P}(X \in A) = \sum_{i: x_i \in A} p_i \right)$$