Definicja przestrzeni probabilistycznej – podsumowanie

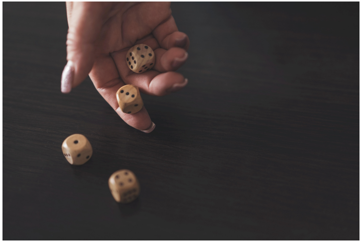
Definicja

Przestrzenią probabilistyczną nazywamy trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, składającą się z:

- niepustego zbioru Ω (przestrzeń zdarzeń elementarnych),
- odpowiedniego zbioru $\mathcal{F}$ (przestrzeń zdarzeń losowych) podzbiorów zbioru Ω,
- miary probabilistycznej, czyli funkcji $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$, takiej że
  (1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
  (2) dla rozłącznych $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ zachodzi $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \ldots$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

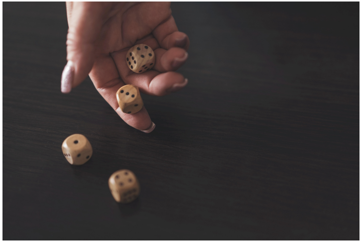
Prawdopodobieństwo warunkowe



a) Doświadczenie polega na rzucie symetryczną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odgadniemy wynik rzutu?

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Oleksandr P)

Prawdopodobieństwo warunkowe



a) Doświadczenie polega na rzucie symetryczną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo, że odgadniemy wynik rzutu?

b) Rzucający informuje nas, że wypadła parzysta liczba oczek.
Czy wykorzystanie tej wiedzy zwiększa naszą szansę na odgadnięcie wyniku?

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Oleksandr P)

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, oraz niech $A, B \in \mathcal{F}$ będą dowolnymi zdarzeniami losowymi.

Jeśli $\mathbb{P}(B) > 0$,

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, oraz niech $A, B \in \mathcal{F}$ będą dowolnymi zdarzeniami losowymi.

Jeśli $\mathbb{P}(B) > 0$, to prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B nazywamy liczbę

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przykład

- $\Omega = \{(w, o):\ w, o \in \{1, \ldots, 6\}\}$, $\mathcal{F}$ – zbiór wszystkich podzbiorów Ω
- Zdarzenia są równo prawdopodobne (prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi 1/36).

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przykład

- $\Omega = \{(w, o) : \; w, o \in \{1, \ldots, 6\}\}$, $\qquad \mathcal{F}$ – zbiór wszystkich podzbiorów Ω
- Zdarzenia są równo prawdopodobne (prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi $1/36$).
- $A = \{(w, o) \in \Omega : \; w = o\}$ – odgadnięcie wyniku

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przykład

- $\Omega = \{(w, o) : \ w, o \in \{1, \ldots, 6\}\}$, $\quad \mathcal{F}$ – zbiór wszystkich podzbiorów Ω
- Zdarzenia są równo prawdopodobne (prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi 1/36).
- $A = \{(w, o) \in \Omega : \ w = o\}$ – odgadnięcie wyniku
- $B = \{(w, o) \in \Omega : \ w, o \in \{2, 4, 6\}\}$ – wypadnięcie parzystej liczby oczek i poinformowanie o tym zgadującego

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przykład

- $\Omega = \{(w,o): \; w,o \in \{1,\ldots,6\}\}$, $\mathcal{F}$ – zbiór wszystkich podzbiorów Ω
- Zdarzenia są równo prawdopodobne (prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi 1/36).
- $A = \{(w,o) \in \Omega : \; w = o\}$ – odgadnięcie wyniku
- $B = \{(w,o) \in \Omega : \; w,o \in \{2,4,6\}\}$ – wypadnięcie parzystej liczby oczek i poinformowanie o tym zgadującego

  a)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{moc zbioru } A}{\text{moc zbioru } \Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przykład

- $\Omega = \{(w,o):\ w,o \in \{1,\dots,6\}\}$, $\mathcal{F}$ – zbiór wszystkich podzbiorów Ω
- Zdarzenia są równo prawdopodobne (prawdopodobieństwo każdego z nich wynosi 1/36).
- $A = \{(w,o) \in \Omega:\ w = o\}$ – odgadnięcie wyniku
- $B = \{(w,o) \in \Omega:\ w,o \in \{2,4,6\}\}$ – wypadnięcie parzystej liczby oczek i poinformowanie o tym zgadującego

a)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{moc zbioru } A}{\text{moc zbioru } \Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

b)

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3/36}{9/36} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

Zdarzenia losowe niezależne

Zdarzenia losowe niezależne

Definicja

Zdarzenia A i B są niezależne, gdy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B).$$

Zdarzenia losowe niezależne

Definicja

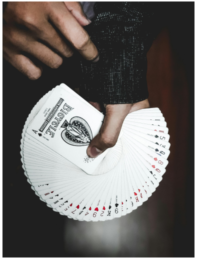
Zdarzenia A i B są niezależne, gdy

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) * \mathbb{P}(B).$$

Uwaga

Jeśli zdarzenia A i B są niezależne, tzn. jedno nie ma wpływu na zajście drugiego, to $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ lub $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

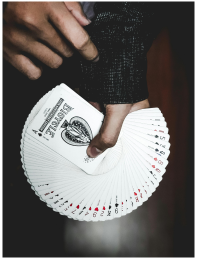
Zdarzenia losowe niezależne – przykład



- Z talii 52 kart losujemy jedną.

Źródło: https://www.pexels.com/ (Kobe -)

Zdarzenia losowe niezależne – przykład

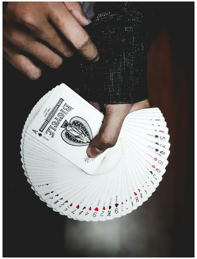


- Z talii 52 kart losujemy jedną.
- Wylosowanie pika (A) jest niezależne od wylosowania asa (B):

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}.$$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Kobe -)

Zdarzenia losowe niezależne – przykład



- Z talii 52 kart losujemy jedną.
- Wylosowanie pika (A) jest niezależne od wylosowania asa (B):

$$\mathbb{P}(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{52}.$$

- Wylosowanie pika (A) jest zależne od wylosowania czarnej karty (C):

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}.$$

Źródło: `https://www.pexels.com/` (Kobe -)