# Parametryczne testy istotności

# Błędy I i II rodzaju

- **Błąd I rodzaju**
  – odrzucenie $H_0$, gdy jest ona prawdziwa.

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\text{odrzucenie } H_0 | H_0\right)$$

- **Błąd II rodzaju**
  – przyjęcie $H_0$, gdy jest ona fałszywa.

$$\beta := \mathbb{P}\left(\text{przyjęcie } H_0 | H_1\right)$$

Źródło: https://unsplash.com/ (Alex Block)

# Parametryczne testy istotności

**Testy istotności**:

- To **najczęściej wykorzystywane w praktyce** testy statystyczne.

# Parametryczne testy istotności

**Testy istotności**:

- To **najczęściej wykorzystywane w praktyce** testy statystyczne.
- **Biorą pod uwagę jedynie prawdopodobieństwo $\alpha$ błędu I rodzaju**.

# Parametryczne testy istotności

**Testy istotności**:

- To **najczęściej wykorzystywane w praktyce** testy statystyczne.
- **Biorą pod uwagę jedynie prawdopodobieństwo $\alpha$ błędu I rodzaju**.
- Pomijają całkowicie kwestię błędu II rodzaju i prawdopodobieństwa $\beta$ jego popełnienia.

# Parametryczne testy istotności

**Testy istotności**:

- To **najczęściej wykorzystywane w praktyce** testy statystyczne.
- **Biorą pod uwagę jedynie prawdopodobieństwo $\alpha$ błędu I rodzaju**.
- Pomijają całkowicie kwestię błędu II rodzaju i prawdopodobieństwa $\beta$ jego popełnienia.
- Pozwalają one:
  - ALBO na **odrzucenie sprawdzanej hipotezy $H_0$ na poziomie istotności $\alpha$**,

# Parametryczne testy istotności

**Testy istotności**:

- To **najczęściej wykorzystywane w praktyce** testy statystyczne.
- **Biorą pod uwagę jedynie prawdopodobieństwo $\alpha$ błędu I rodzaju**.
- Pomijają całkowicie kwestię błędu II rodzaju i prawdopodobieństwa $\beta$ jego popełnienia.
- Pozwalają one:
  - ALBO na **odrzucenie sprawdzanej hipotezy $H_0$ na poziomie istotności $\alpha$**,
  - ALBO na **stwierdzenie braku podstaw do jej odrzucenia** (co nie oznacza jej akceptacji, lecz jedynie brak wystarczających dowodów na jej odrzucenie).

# Testy jednostronne i dwustronne

## Uwaga

Testy mogą być jednostronne i dwustronne.

**Wybór odpowiedniego testu zależy od badanego problemu**.

# Testy jednostronne i dwustronne

## Uwaga

Testy mogą być jednostronne i dwustronne.

**Wybór odpowiedniego testu zależy od badanego problemu**.

## Przykład

Chcemy porównać żywotność żarówek produkowanych przez dwie różne marki, z których

- jedna wykorzystuje standardowy proces (średnia żywotność $= m_1$),
- a druga nową technikę (średnia żywotność $= m_2$).

# Testy jednostronne i dwustronne

### Uwaga

Testy mogą być jednostronne i dwustronne.

**Wybór odpowiedniego testu zależy od badanego problemu**.

### Przykład

Chcemy porównać żywotność żarówek produkowanych przez dwie różne marki, z których

- jedna wykorzystuje standardowy proces (średnia żywotność $= m_1$),
- a druga nową technikę (średnia żywotność $= m_2$).

**Sposób sformułowania pytania zadecyduje o rodzaju testu.**

# Testy jednostronne i dwustronne

## Przykład

- Jeśli chcemy sprawdzić, czy żarówki <u>różnią się znacząco pod względem żywotności</u>, to testujemy hipotezę $H_0 : m_1 = m_2$ w porównaniu z

$$H_1 : m_1 \neq m_2.$$

Wykonujemy **test dwustronny**.

# Testy jednostronne i dwustronne

## Przykład

- Jeśli chcemy sprawdzić, czy żarówki różnią się znacząco pod względem żywotności, to testujemy hipotezę $H_0 : m_1 = m_2$ w porównaniu z
$$H_1 : m_1 \neq m_2.$$
Wykonujemy **test dwustronny**.
- Jeśli chcemy sprawdzić, czy żarówki wyprodukowane nowym procesem mają dłuższą średnią żywotność niż te wyprodukowane standardowym procesem, to testujemy hipotezę $H_0 : m_1 \geqslant m_2$ w porównaniu z
$$H_1 : m_1 < m_2.$$
Wykonujemy **test jednostronny lewostronny**.

# Przybliżanie rozkładem normalnym

Rozważmy zmienne losowe $t$ i $Z$, gdzie $t$ jest statystyką testową, a $Z$ jest dana wzorem

$$Z = \frac{t - \mathbb{E}(t)}{\sqrt{D^2(t)}} \quad \text{(ustandaryzowana zmienna losowa } t\text{)}.$$

Wiemy (**z centralnego twierdzenia granicznego**), że

- dla odpowiednio dużej wielkości próbki $n$ rozkład statystyki $t$ (niezależnie od rozkładu opisującego wynik w pojedynczej próbie) można przybliżać rozkładem normalnym,

a zatem

- **zmienną $Z$ możemy opisywać rozkładem normalnym standardowym** $\mathcal{N}(0,1)$.

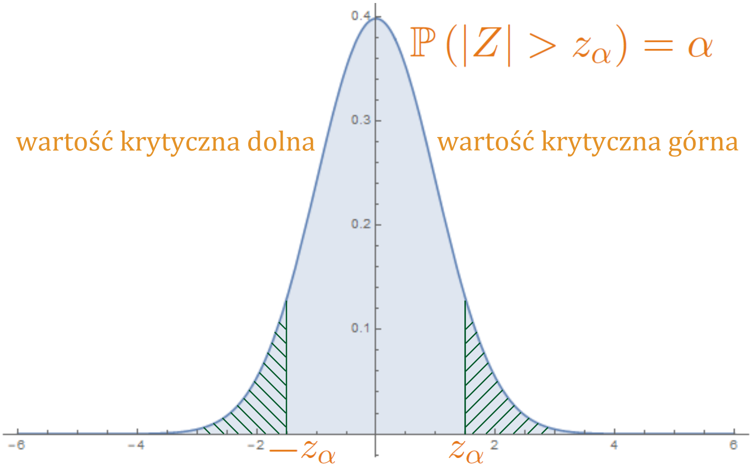
# Wartość krytyczna statystyki $Z$ na poziomie istotności $\alpha$ (dla testu dwustronnego)

## Definicja

**Wartość krytyczną statystyki testowej $Z$ na poziomie istotności $\alpha$ dla testu dwustronnego** oznaczamy przez $z_\alpha$ i wyznaczamy ze wzoru

$$\mathbb{P}\left(|Z| > z_\alpha\right) = \alpha.$$

# Wartość krytyczna statystyki $Z$ na poziomie istotności $\alpha$ (dla testu dwustronnego)



# Wartość krytyczna statystyki $Z$ na poziomie istotności $\alpha$ (dla testu jednostronnego)

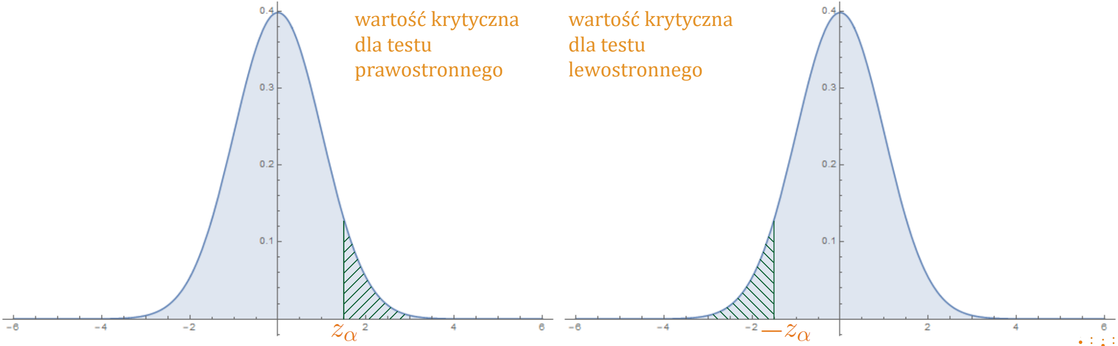
**Definicja**

**Wartość krytyczną statystyki testowej $Z$ na poziomie istotności $\alpha$ dla testu jednostronnego** wyznaczamy ze wzoru

$$\mathbb{P}\left(Z > z_\alpha\right) = \alpha \qquad \textbf{dla testu prawostronnego},$$

$$\mathbb{P}\left(Z < -z_\alpha\right) = \alpha \qquad \textbf{dla testu lewostronnego}.$$

# Wartość krytyczna statystyki $Z$ na poziomie istotności $\alpha$ (dla testu jednostronnego)



# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – podsumowanie

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – podsumowanie

1. Sformułuj hipotezę zerową $H_0$.

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – podsumowanie

1. Sformułuj hipotezę zerową $H_0$.
2. Sformułuj hipotezę alternatywną $H_1$.

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – podsumowanie

1. Sformułuj hipotezę zerową $H_0$.
2. Sformułuj hipotezę alternatywną $H_1$.
3. Zdecyduj, czy należy użyć testu jednostronnego, czy dwustronnego.

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – podsumowanie

1. Sformułuj hipotezę zerową $H_0$.
2. Sformułuj hipotezę alternatywną $H_1$.
3. Zdecyduj, czy należy użyć testu jednostronnego, czy dwustronnego.
4. Wybierz odpowiedni poziom istotności $\alpha$ w zależności od wiarygodności oszacowań oraz dopuszczalnego ryzyka ($\alpha$ musi być ustalona z góry, przed pobraniem próby).

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – podsumowanie

1. Sformułuj hipotezę zerową $H_0$.
2. Sformułuj hipotezę alternatywną $H_1$.
3. Zdecyduj, czy należy użyć testu jednostronnego, czy dwustronnego.
4. Wybierz odpowiedni poziom istotności $\alpha$ w zależności od wiarygodności oszacowań oraz dopuszczalnego ryzyka ($\alpha$ musi być ustalona z góry, przed pobraniem próby).
5. Oblicz statystykę testową $Z = (t - \mathbb{E}(t))/\sqrt{D^2(t)}$:

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – podsumowanie

1. Sformułuj hipotezę zerową $H_0$.
2. Sformułuj hipotezę alternatywną $H_1$.
3. Zdecyduj, czy należy użyć testu jednostronnego, czy dwustronnego.
4. Wybierz odpowiedni poziom istotności $\alpha$ w zależności od wiarygodności oszacowań oraz dopuszczalnego ryzyka ($\alpha$ musi być ustalona z góry, przed pobraniem próby).
5. Oblicz statystykę testową $Z = (t - \mathbb{E}(t))/\sqrt{D^2(t)}$:
   - Jeśli $|Z| > z_\alpha$, to **odrzuć** $H_0$ **na poziomie istotności** $\alpha$ (różnica $t - \mathbb{E}(t)$ jest statystycznie istotna).

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – podsumowanie

1. Sformułuj hipotezę zerową $H_0$.
2. Sformułuj hipotezę alternatywną $H_1$.
3. Zdecyduj, czy należy użyć testu jednostronnego, czy dwustronnego.
4. Wybierz odpowiedni poziom istotności $\alpha$ w zależności od wiarygodności oszacowań oraz dopuszczalnego ryzyka ($\alpha$ musi być ustalona z góry, przed pobraniem próby).
5. Oblicz statystykę testową $Z = (t - \mathbb{E}(t))/\sqrt{D^2(t)}$:
   - Jeśli $|Z| > z_\alpha$, to **odrzuć** $H_0$ **na poziomie istotności** $\alpha$ (różnica $t - \mathbb{E}(t)$ jest statystycznie istotna).
   - Jeśli $|Z| \leqslant z_\alpha$, to (ze względu na brak wystarczających dowodów przeciwko $H_0$) **przyjmij** $H_0$ (różnica $t - \mathbb{E}(t)$ jest prawdopodobnie wynikiem fluktuacji próbkowania).

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – podsumowanie

## Uwaga

Z tablic rozkładu normalnego wiemy, że

$$\mathbb{P}(-1,96 \leqslant Z \leqslant 1,96) = 0,95, \qquad \mathbb{P}(|Z| \leqslant 1,96) = 0,95 \Rightarrow \quad \mathbb{P}(|Z| > 1,96) = 0,05;$$
$$\mathbb{P}(-2.58 \leqslant Z \leqslant 2,58) = 0,99, \qquad \mathbb{P}(|Z| \leqslant 2,58) = 0,99 \Rightarrow \quad \mathbb{P}(|Z| > 2,58) = 0,01.$$

Zatem **wartości krytyczne statystyki $Z$ dla poziomów istotności 5% i 1% w teście dwustronnym** to odpowiednio: $1,96$ i $2,58$.

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – przykład

## Przykład

W próbie 1000 osób w Maharasztrze w Indiach $540$ osób je głównie ryż, a pozostałe wybierają pszenicę. Czy możemy przyjąć, że ryż i pszenica są równie popularne w tym stanie na poziomie istotności 1%?

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – przykład

## Przykład

W próbie 1000 osób w Maharasztrze w Indiach $540$ osób je głównie ryż, a pozostałe wybierają pszenicę. Czy możemy przyjąć, że ryż i pszenica są równie popularne w tym stanie na poziomie istotności 1%?

- $n = 1000$ (możemy modelować rozkładem normalnym)

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – przykład

## Przykład

W próbie 1000 osób w Maharasztrze w Indiach $540$ osób je głównie ryż, a pozostałe wybierają pszenicę. Czy możemy przyjąć, że ryż i pszenica są równie popularne w tym stanie na poziomie istotności 1%?

- $n = 1000$ (możemy modelować rozkładem normalnym)
- $X = 540$ – ilość osób jedzących ryż
- $p = \frac{X}{n} = 0,54$ – proporcja osób jedzących ryż w próbie do wszystkich osób w próbie

# Procedura testowania hipotez (dla testów dwustr.) – przykład

## Przykład

W próbie 1000 osób w Maharasztrze w Indiach $540$ osób je głównie ryż, a pozostałe wybierają pszenicę. Czy możemy przyjąć, że ryż i pszenica są równie popularne w tym stanie na poziomie istotności 1%?

- $n = 1000$ (możemy modelować rozkładem normalnym)
- $X = 540$ – ilość osób jedzących ryż
- $p = \frac{X}{n} = 0,54$ – proporcja osób jedzących ryż w próbie do wszystkich osób w próbie
- $H_0$: $P = 0,5$ (Ryż i pszenica są równie popularne w stanie Maharasztra w Indiach.)
- $H_1$: $P \neq 0,5$ (użyjemy testu dwustronnego)

# Procedura testowania hipotez – przykład

- $n = 1000, \quad p = \frac{X}{n} = 0,54 \quad H_0\colon P = 0,5, \quad H_1\colon P \neq 0,5$

# Procedura testowania hipotez – przykład

- $n = 1000, \quad p = \frac{X}{n} = 0,54 \quad H_0\colon P = 0,5, \quad H_1\colon P \neq 0,5$

$$Z = \frac{p - \mathbb{E}(p)}{\sqrt{D^2(p)}} = \frac{p - \mathbb{E}(X/n)}{\sqrt{D^2(X/n)}} = \frac{p - \frac{nP}{n}}{\sqrt{\frac{nP(1-P)}{n^2}}} = \frac{p - P}{\sqrt{P(1-P)/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

# Procedura testowania hipotez – przykład

- $n = 1000, \quad p = \frac{X}{n} = 0,54 \quad H_0\colon P = 0,5, \quad H_1\colon P \neq 0,5$

$$Z = \frac{p - \mathbb{E}(p)}{\sqrt{D^2(p)}} = \frac{p - \mathbb{E}(X/n)}{\sqrt{D^2(X/n)}} = \frac{p - \frac{nP}{n}}{\sqrt{\frac{nP(1-P)}{n^2}}} = \frac{p - P}{\sqrt{P(1-P)/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$Z = \frac{0,54 - 0,5}{\sqrt{(0,5 * 0,5)/1000}} = \frac{0,04}{0,5/10} = 2,532.$$

# Procedura testowania hipotez – przykład

- $n = 1000, \quad p = \frac{X}{n} = 0,54 \quad H_0\colon P = 0,5, \quad H_1\colon P \neq 0,5$

$$Z = \frac{p - \mathbb{E}(p)}{\sqrt{D^2(p)}} = \frac{p - \mathbb{E}(X/n)}{\sqrt{D^2(X/n)}} = \frac{p - \frac{nP}{n}}{\sqrt{\frac{nP(1-P)}{n^2}}} = \frac{p - P}{\sqrt{P(1-P)/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$Z = \frac{0,54 - 0,5}{\sqrt{(0,5 * 0,5)/1000}} = \frac{0,04}{0,5/10} = 2,532.$$

- ($z_\alpha$ przy poziomie istotności $\alpha = 1\%$ dla testu dwustronnego wynosi $2,58$)

# Procedura testowania hipotez – przykład

- $n = 1000, \quad p = \frac{X}{n} = 0,54 \quad H_0\colon P = 0,5, \quad H_1\colon P \neq 0,5$

$$Z = \frac{p - \mathbb{E}(p)}{\sqrt{D^2(p)}} = \frac{p - \mathbb{E}(X/n)}{\sqrt{D^2(X/n)}} = \frac{p - \frac{nP}{n}}{\sqrt{\frac{nP(1-P)}{n^2}}} = \frac{p - P}{\sqrt{P(1-P)/n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$Z = \frac{0,54 - 0,5}{\sqrt{(0,5 * 0,5)/1000}} = \frac{0,04}{0,5/10} = 2,532.$$

- ($z_\alpha$ przy poziomie istotności $\alpha = 1\%$ dla testu dwustronnego wynosi $2,58$)
- $Z = 2,53 < 2,58$, więc **nie ma podstaw do odrzucenia** $H_0$.