Weryfikacja hipotez statystycznych

Hipoteza statystyczna

Definicja

Hipotezą statystyczną nazywamy **każdy sąd dotyczący populacji generalnej**, wydany **bez** przeprowadzenia **badania wyczerpującego** (tzn. takiego, które obejmuje całą populację, a nie tylko jej próbę).

Hipoteza statystyczna

Definicja

Hipotezą statystyczną nazywamy **każdy sąd dotyczący populacji generalnej**, wydany **bez** przeprowadzenia **badania wyczerpującego** (tzn. takiego, które obejmuje całą populację, a nie tylko jej próbę).

- Hipoteza parametryczna — dotyczy wartości parametrów rozkładu (gdy ten rozkład jest znany, a dokładniej znana jest jego postać funkcyjna).
- Hipoteza nieparametryczna — dotyczy postaci funkcyjnej rozkładu.

Hipoteza statystyczna

Przykłady

1. *Populacja generalna ma rozkład dwumianowy.*
2. *Wariancje dwóch populacji o rozkładzie normalnym są sobie równe.*
3. *W roku 2050 będzie klęska żywiołowa.*

Zbiór hipotez dopuszczalnych

Definicja

Zbiorem hipotez dopuszczalnych nazywamy zbiór możliwych przypuszczeń ograniczony przez posiadaną już wiedzę o rozkładzie populacji generalnej.

Zbiór hipotez dopuszczalnych

Definicja

Zbiorem hipotez dopuszczalnych nazywamy zbiór możliwych przypuszczeń ograniczony przez posiadaną już wiedzę o rozkładzie populacji generalnej.

Przykład

Jeśli wiemy, że badana zmienna losowa X ma w populacji generalnej rozkład normalny, to zbiór hipotez dopuszczalnych składa się ze wszystkich rozkładów normalnych (różniących się jedynie parametrami m i σ^2).

Hipoteza zerowa i hipoteza alternatywna

ZBIÓR HIPOTEZ DOPUSZCZALNYCH

HIPOTEZA ZEROWA H_0

(hipoteza, którą sprawdzamy)

Sądzimy, że między estymatorem i parametrem (lub rozkładem empirycznym i teoretycznym) nie ma statystycznie istotnej różnicy.

HIPOTEZA ALTERNATYWNA H_1

(hipoteza, którą jesteśmy w stanie przyjąć, w przypadku odrzucenia hipotezy H_0)

Dopuszczamy istnienie różnic między estymatorami i parametrami (bądź między rozkładami z prób i rozkładami teoretycznymi).

Hipoteza zerowa i hipoteza alternatywna

Uwaga

Hipoteza alternatywna musi być komplementarna do hipotezy zerowej.

Hipoteza zerowa i hipoteza alternatywna

Uwaga

Hipoteza alternatywna musi być komplementarna do hipotezy zerowej.

Przykład: Jeśli $H_0 : m = m_0$, to H_1 może przyjąć jedną z poniższych form:

- $m \neq m_0$ (**hipoteza dwustronna**);
- $m > m_0$ (**hipoteza prawostronna**);
- $m < m_0$ (**hipoteza lewostronna**).

Hipoteza zerowa i hipoteza alternatywna

Uwaga

Hipoteza alternatywna musi być komplementarna do hipotezy zerowej.

Przykład: Jeśli $H_0 : m = m_0$, to H_1 może przyjąć jedną z poniższych form:

- $m \neq m_0$ (**hipoteza dwustronna**);
- $m > m_0$ (**hipoteza prawostronna**);
- $m < m_0$ (**hipoteza lewostronna**).

Wybór odpowiedniej hipotezy alternatywnej jest kluczowy, ponieważ determinuje, czy zastosujemy **test jednostronny** czy **dwustronny**.

Weryfikacja hipotez statystycznych

Definicja

Weryfikacją hipotezy statystycznej nazywamy skonfrontowanie jej treści z wynikami z próby losowej.

Weryfikacja hipotez statystycznych

Definicja

Weryfikacją hipotezy statystycznej nazywamy skonfrontowanie jej treści z wynikami z próby losowej.

Test statystyczny przyporządkowuje każdej możliwej realizacji próbki decyzję o przyjęciu bądź odrzuceniu sprawdzanej hipotezy H_0 (z pewnym ustalonym prawdopodobieństwem).

Weryfikacja hipotez statystycznych

Definicja

Weryfikacją hipotezy statystycznej nazywamy skonfrontowanie jej treści z wynikami z próby losowej.

Test statystyczny przyporządkowuje każdej możliwej realizacji próbki decyzję o przyjęciu bądź odrzuceniu sprawdzanej hipotezy H_0 (z pewnym ustalonym prawdopodobieństwem).

Uwaga

- Przyjęcie H_0 – uznanie jej za prawdziwą.

Weryfikacja hipotez statystycznych

Definicja

Weryfikacją hipotezy statystycznej nazywamy skonfrontowanie jej treści z wynikami z próby losowej.

Test statystyczny przyporządkowuje każdej możliwej realizacji próbki decyzję o przyjęciu bądź odrzuceniu sprawdzanej hipotezy H_0 (z pewnym ustalonym prawdopodobieństwem).

Uwaga

- Przyjęcie H_0 – uznanie jej za prawdziwą.
- Odrzucenie H_0 – uznanie jej za fałszywą (wówczas jako prawdziwa przyjmowana jest H_1).

Weryfikacja hipotez statystycznych

Definicja

Weryfikacją hipotezy statystycznej nazywamy skonfrontowanie jej treści z wynikami z próby losowej.

Test statystyczny przyporządkowuje każdej możliwej realizacji próbki decyzję o przyjęciu bądź odrzuceniu sprawdzanej hipotezy H_0 (z pewnym ustalonym prawdopodobieństwem).

Uwaga

- Przyjęcie H_0 – uznanie jej za prawdziwą.
- Odrzucenie H_0 – uznanie jej za fałszywą (wówczas jako prawdziwa przyjmowana jest H_1).

Testowanie hipotez opiera się na wynikach z próby losowej, więc **decyzja o przyjęciu bądź odrzuceniu hipotezy może być <u>błędna</u>**.

Błędy I i II rodzaju

Rodzaje błędów w testowaniu hipotez

- **Błąd I rodzaju** – odrzucenie H_0, gdy jest ona prawdziwa.
- **Błąd II rodzaju** – przyjęcie H_0, gdy jest ona fałszywa.

Błędy I i II rodzaju

Rodzaje błędów w testowaniu hipotez

- **Błąd I rodzaju** – odrzucenie H_0, gdy jest ona prawdziwa.
- **Błąd II rodzaju** – przyjęcie H_0, gdy jest ona fałszywa.

Miarą wielkości tych błędów są odpowiednio **prawdopodobieństwa**:

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\text{odrzucenie } H_0 | H_0\right) \qquad \text{i} \qquad \beta := \mathbb{P}\left(\text{przyjęcie } H_0 | H_1\right).$$

Błędy I i II rodzaju

Rodzaje błędów w testowaniu hipotez

- **Błąd I rodzaju** – odrzucenie H_0, gdy jest ona prawdziwa.
- **Błąd II rodzaju** – przyjęcie H_0, gdy jest ona fałszywa.

Miarą wielkości tych błędów są odpowiednio **prawdopodobieństwa**:

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\text{odrzucenie } H_0 | H_0\right) \qquad \text{i} \qquad \beta := \mathbb{P}\left(\text{przyjęcie } H_0 | H_1\right).$$

Im mniejsze są α i β, tym lepszy jest dany test statystyczny.

Błędy I i II rodzaju

Rodzaje błędów w testowaniu hipotez

- **Błąd I rodzaju** – odrzucenie H_0, gdy jest ona prawdziwa.
- **Błąd II rodzaju** – przyjęcie H_0, gdy jest ona fałszywa.

Miarą wielkości tych błędów są odpowiednio **prawdopodobieństwa**:

$$\alpha := \mathbb{P}\left(\text{odrzucenie } H_0 | H_0\right) \qquad \text{i} \qquad \beta := \mathbb{P}\left(\text{przyjęcie } H_0 | H_1\right).$$

Im mniejsze są α i β, tym lepszy jest dany test statystyczny.

Nie jest możliwe równoczesne zmniejszanie obu tych wartości.

Obszar odrzucenia i obszar przyjęcia H_0

- Z obserwowanych w próbie zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ możemy utworzyć różne funkcje (statystyki).
- Wybieramy jedną z nich – **statystykę testową** (i oznaczamy ją np. literą t).

Obszar odrzucenia i obszar przyjęcia H_0

- Z obserwowanych w próbie zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ możemy utworzyć różne funkcje (statystyki).
- Wybieramy jedną z nich – **statystykę testową** (i oznaczamy ją np. literą t).
- Dla różnych próbek statystyka t przyjmuje różne wartości (jedne świadczące o zgodności z H_0, inne wręcz przeciwnie).

Obszar odrzucenia i obszar przyjęcia H_0

- Z obserwowanych w próbie zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ możemy utworzyć różne funkcje (statystyki).
- Wybieramy jedną z nich – **statystykę testową** (i oznaczamy ją np. literą t).
- Dla różnych próbek statystyka t przyjmuje różne wartości (jedne świadczące o zgodności z H_0, inne wręcz przeciwnie).
- Dzielimy zbiór wszystkich możliwych wartości tej funkcji na dwa rozłączne i dopełniające się podzbiory W i W', takie że
  - gdy $t(x_1, \ldots, x_n) \in W$, to odrzucamy hipotezę H_0 (W – **obszar krytyczny testu/ obszar odrzucenia** H_0),
  - gdy $t(x_1, \ldots, x_n) \in W'$, to przyjmujemy hipotezę H_0 (W' – **obszar przyjęcia** H_0).

Obszar odrzucenia i obszar przyjęcia H_0

Uwaga

Dla zbiorów W i W' określających **obszar odrzucenia** i **obszar przyjęcia** H_0, tzn.

- gdy $t(x_1, \ldots, x_n) \in W$, to odrzucamy hipotezę H_0,
- gdy $t(x_1, \ldots, x_n) \in W'$, to przyjmujemy hipotezę H_0,

Obszar odrzucenia i obszar przyjęcia H_0

Uwaga

Dla zbiorów W i W' określających **obszar odrzucenia** i **obszar przyjęcia** H_0, tzn.

- gdy $t(x_1, \ldots, x_n) \in W$, to odrzucamy hipotezę H_0,
- gdy $t(x_1, \ldots, x_n) \in W'$, to przyjmujemy hipotezę H_0,

zachodzą następujące równości:

$$\mathbb{P}\left(t \in W | H_0\right) = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{P}\left(t \in W' | H_1\right) = \beta.$$

Poziom istotności testu

$$\mathbb{P}\left(t \in W | H_0\right) = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{P}\left(t \in W' | H_1\right) = \beta.$$

Definicja

Wartość α, a więc prawdopodobieństwo, że losowa wartość statystyki t znajdzie się w obszarze krytycznym (przy założeniu prawdziwości H_0), nazywamy **poziomem istotności testu**.

Poziom istotności testu

$$\mathbb{P}\left(t \in W|H_0\right) = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{P}\left(t \in W'|H_1\right) = \beta.$$

Definicja

Wartość α, a więc prawdopodobieństwo, że losowa wartość statystyki t znajdzie się w obszarze krytycznym (przy założeniu prawdziwości H_0), nazywamy **poziomem istotności testu**.

Uwaga

- Wartości α i β powinny być jak najmniejsze, **JEDNAK** ich **równoczesne minimalizowanie nie jest możliwe**.

Poziom istotności testu

$$\mathbb{P}\left(t \in W | H_0\right) = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{P}\left(t \in W' | H_1\right) = \beta.$$

Definicja

Wartość α, a więc prawdopodobieństwo, że losowa wartość statystyki t znajdzie się w obszarze krytycznym (przy założeniu prawdziwości H_0), nazywamy **poziomem istotności testu**.

Uwaga

- Wartości α i β powinny być jak najmniejsze, **JEDNAK** ich **równoczesne minimalizowanie nie jest możliwe**.
- W praktyce: poziom istotności α ustalany jest z wyprzedzeniem, zanim zostaną zebrane dane o próbie.

Poziom istotności testu

$$\mathbb{P}\left(t \in W | H_0\right) = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{P}\left(t \in W' | H_1\right) = \beta.$$

Definicja

Wartość α, a więc prawdopodobieństwo, że losowa wartość statystyki t znajdzie się w obszarze krytycznym (przy założeniu prawdziwości H_0), nazywamy **poziomem istotności testu**.

Uwaga

- Wartości α i β powinny być jak najmniejsze, **JEDNAK** ich **równoczesne minimalizowanie nie jest możliwe**.
- W praktyce: poziom istotności α ustalany jest z wyprzedzeniem, zanim zostaną zebrane dane o próbie.
- Najczęściej: $\alpha = 5\%$ lub $\alpha = 1\%$.

Moc testu

$$\mathbb{P}\left(t \in W \middle| H_0\right) = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{P}\left(t \in W' \middle| H_1\right) = \beta.$$

Moc testu

$$\mathbb{P}\left(t \in W | H_0\right) = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{P}\left(t \in W' | H_1\right) = \beta.$$

Definicja

Wartość $1 - \beta$, a więc prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy H_0 i przyjęcie w jej miejsce prawdziwej hipotezy alternatywnej H_1, nazywamy **mocą testu**.

Moc testu

$$\mathbb{P}\left(t \in W | H_0\right) = \alpha \qquad \text{oraz} \qquad \mathbb{P}\left(t \in W' | H_1\right) = \beta.$$

Definicja

Wartość $1 - \beta$, a więc prawdopodobieństwo odrzucenia fałszywej hipotezy H_0 i przyjęcie w jej miejsce prawdziwej hipotezy alternatywnej H_1, nazywamy **mocą testu**.

Definicja

Test, który przy ustalonym poziomie istotności α minimalizuje wartość β (lub inaczej **maksymalizuje moc test**), nazywamy **testem najefektywniejszym dla H_0 względem H_1**.